**УДК 532.7+532.516.5+532.593**

# РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ ДЛЯ 3D МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ ТИПА ЖИДКОСТЬ–ПАР

**Куперштох А.Л.**

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-08-00805),
Президиума РАН (проект № 2.12.12),
Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (проект № 2.14.3),
Президента Российской федерации (грант НШ-5770.2010.1)
и Сибирского отделения РАН (проекты № 58-2009 и № 116-2009).

## АННОТАЦИЯ

Сравнительно новый метод решеточных уравнений Больцмана (LBE) представляет собой дискретную модель сплошной среды. В настоящее время метод LBE вполне может конкурировать с традиционными методами вычислительной гидродинамики, а в некоторых областях (многофазные и многокомпонентные течения) он имеет значительные преимущества. При моделировании фазовых переходов метод LBE представляет собой метод сквозного счета границ раздела фаз. Алгоритм LBE хорошо распараллеливается на большое количество потоковых процессоров в современных графических картах (Graphics Processing Unit, GPU). Приведены примеры трехмерного моделирования спинодальной декомпозиции, разрыва тонких пленок жидкости за счет термокапиллярного эффекта и разрушения тонкостенного жидкого пузыря. Ускорение расчетов достигает 70-90 раз.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широко применяется компьютерное моделирование течений среды методом решеточных уравнений Больцмана – Lattice Boltzmann Equation (LBE). Метод LBE широко используется для компьютерного моделирования течений жидкости, включая многофазные и многокомпонентные [1-4].

Решеточные методы представляют собой сравнительно новый класс методов, использующих мезоскопический подход к описанию вещества. Метод LBE представляет собой дискретную модель сплошной среды. При этом метод решеточных уравнений Больцмана более перспективен, чем обычные конечно-разностные методы, так как более адекватен природе вещества. В настоящее время метод LBE вполне может конкурировать с традиционными методами вычислительной гидродинамики, а в некоторых областях (многофазные и многокомпонентные течения) он имеет значительные преимущества. До настоящего времени параллельные вычисления на одной или нескольких видеокартах применялись только для простых вариантов метода LBE без фазовых переходов.

## МЕТОД РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

В отличие от классических методов расчета течений жидкости путем решения уравнений Навье – Стокса метод решеточных уравнений Больцмана рассматривает течение как движение ансамбля псевдо-частиц, имеющих некоторую функцию распределения по дискретным скоростям.

Основная идея, предложенная в [5], заключается в том, что в кинетическом уравнении Больцмана для описания гидро-газодинамики

достаточно использовать дискретный конечный набор скоростей частиц $\mathbf{c}_k$. Кроме того, в методе LBE скорости $\mathbf{c}_k$ выбираются таким образом, чтобы за шаг по времени $\Delta t$ частицы перелетали в соседние узлы регулярной пространственной решетки, вектора которой удовлетворяют условию $\mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k \Delta t$ [1,2]. Для трехмерной девятнадцатискоростной модели D3Q19 [6] возможный набор векторов скорости ($k = 0,1,...,b$, $b$ = 18) показан на рис.1.

В методе LBE в качестве переменных используются одночастичные функции распределения $N_k(\mathbf{x},t)$ для всего конечного набора скоростей частиц $\mathbf{c}_k$.

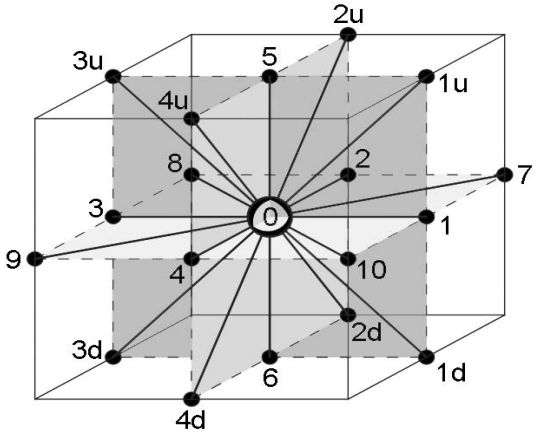


Рис.1 Возможные вектора скорости частиц в методе решеточных уравнений Больцмана для трехмерной девятнадцатискоростной модели D3Q19.

Для реализации алгоритма вычислений нами использовано расщепление метода LBE по физическим процессам.

Уравнения переноса для функций распределения $N_k$ вдоль характеристик (которые являются прямыми для уравнения Больцмана) на дискретной решетке имеют вид

$$\tilde{N}_k(\mathbf{x},t) = N_k(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k \Delta t, t - \Delta t) \ . \qquad (1)$$

Гидродинамические переменные: плотность жидкости ρ и скорость u в узле вычисляются в соответствие с формулами

$$\rho = \sum_{k=0}^{b} \tilde{N}_k \ , \qquad (2)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{b} \mathbf{c}_k \tilde{N}_k \ . \qquad (3)$$

Для изотермических вариантов LBE-моделей жидкости используется разложение равновесных функций распределения Максвелла – Больцмана в ряд по скорости u до второго порядка [7]

$$N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}) = \rho w_k \left(1 + \frac{\mathbf{c}_k \mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2\theta}\right). \qquad (4)$$

Вектора $\mathbf{c}_k$ и коэффициенты $w_k$ зависят от конкретной решетки. Для трехмерной девятнадцатискоростной модели D3Q19 допустимы 3 значения модуля скорости $|\mathbf{c}_k| = 0$, $h/\Delta t$ и $\sqrt{2}h/\Delta t$. Весовые коэффициенты равны $w_0 = 1/3$, $w_{1-6} = 1/18$ и $w_{7-18} = 1/36$. Здесь $\theta$ – нормированная кинетическая температура псевдо-частиц. Для трехмерной изотермической модели LBE D3Q19 она равна $\theta = (h/\Delta t)^2/3$, где $h$ – шаг решетки.

Кроме того, на каждом шаге по времени происходит изменение функций распределения за счет оператора столкновений и действия сил

$$N_k(\mathbf{x},t) = \tilde{N}_k(\mathbf{x},t) + \Omega_k(\tilde{N}(\mathbf{x},t) + \Delta\tilde{N}_k \ . \qquad (5)$$

Здесь $\Omega_k$ – оператор столкновений, $\Delta\tilde{N}_k$ – изменение функций распределения за счет действия объемных сил (внутренних и внешних). Обычно используется оператор столкновений в виде BGK (Bhatnagar – Gross – Krook [8]) приближения:

$$\Omega_k \quad \Delta\tilde{N}_k \quad \Omega_k = (N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}) - \tilde{N}_k(\mathbf{x},t))/\tau, \qquad (6)$$

которое представляет собой просто релаксацию к локальному равновесию.

Безразмерное время релаксации определяет кинематическую вязкость $\nu = \theta(\tau - 1/2)\Delta t$. Изменяя в определенных пределах параметр $\tau > 1/2$ можно изменять вязкость жидкости.

Для учета действия объемных сил в методе LBE нами предложен метод точной разности [9-12]

$$\Delta N_k(\mathbf{x},t) = N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) - N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}) \ , \qquad (7)$$

где изменение скорости за шаг по времени определяется полной силой F, действующей на вещество в узле,

$$\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{F}\Delta t/\rho \ . \qquad (8)$$

В случае действия объемных сил для вычисления физической скорости $\mathbf{u}^*$ следует использовать выражение, определенное на половине шага по времени [13]

$$\rho\mathbf{u}^* = \sum_{k=1}^{b} \mathbf{c}_k N_k + \mathbf{F}\Delta t/2 \ .$$

Обоснованием метода LBE можно считать тот факт, что во втором порядке разложения Чепмена – Энскога из уравнений LBE получаются макроскопические уравнения гидродинамики, то есть известные уравнения неразрывности и Навье – Стокса.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Компьютерное моделирование фазовых переходов методом LBE представляет собой метод сквозного счета границ раздела фаз, в том числе и вновь возникающих в объеме вещества [14-16]. В этом случае вместо разрыва плотности моделируется тонкий переходной слой жидкость–пар, в котором плотность изменяется плавно на размерах нескольких узлов решетки (аналогично методам сквозного счета ударных волн в газодинамике). При этом заметно упрощается логика компьютерных программ, так как жидкая и газообразная фазы описываются единообразно. Кроме того, отпадает необходимость в сложных граничных условиях на поверхностях раздела фаз.

Для этого в [14] было предложено ввести силы притяжения, действующие на вещество в узле со стороны соседних узлов. При этом, силы между узлами обеспечивают наличие поверхностного натяжения на границе раздела фаз жидкость-пар.

В рамках изотермической модели в [15] было предложено вместо сил притяжения между узлами использовать значение полной силы F, действующей на вещество в каждом узле. Для этого было введено понятие псевдопотенциала $U(\rho) = P(\rho) - \rho\theta$ .

В [16] для описания уравнения состояния произвольного вида $P(\rho,T)$ сила, действующая на вещество в узле, и псевдопотенциал были записаны в форме

$$\mathbf{F} = -\nabla U \ , \qquad (9)$$

где

$$U = P(\rho,T) - \rho\theta \ . \qquad (10)$$

В [17-19] нами предложено для модели [16] ввести новую функцию

$$\Phi = \sqrt{-U} \ . \qquad (11)$$

Тогда выражение для силы (9) можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathbf{F} = A\nabla(\Phi^2) + (1-A)2\Phi\nabla\Phi \ , \qquad (12)$$

где $A$ – свободный параметр.

Конечно-разностная формула для уравнения (12), обеспечивающая достаточную изотропность для трехмерной модели D3Q19 [17-19], записанная в векторной форме, имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha h}\left[(1-2A)\Phi(\mathbf{x})\sum_k \frac{G_k}{G_0}\Phi(\mathbf{x}+\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k + A\sum_k \frac{G_k}{G_0}\Phi^2(\mathbf{x}+\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k\right]. \qquad (13)$$

Здесь $G_k > 0$ – коэффициенты, которые различны для основных и диагональных направлений решетки. Коэффициенты $G_{1-4} = G_0$ соответствуют основным направлениям решетки. Значения коэффициентов для диагональных направлений $G_k$, обеспечивающие изотропность пространства, равны $G_0/2$, а $\alpha = 3$ для трехмерной модели D3Q19.

Использовалось уравнение состояния Вандер- Вальса, которое в приведенных переменных $\tilde{P} = P/P_{\text{кр}}$, $\tilde{\rho} = \rho/\rho_{\text{кр}}$ и $\tilde{T} = T/T_{\text{кр}}$, имеет вид

$$\tilde{P} = \frac{8\tilde{\rho}\tilde{T}}{3-\tilde{\rho}} - 3\tilde{\rho}^2 \ . \qquad (14)$$

Здесь $P_{\text{кр}}$, $\rho_{\text{кр}}$ и $T_{\text{кр}}$ – значения давления, плотности и температуры в критической точке.

Аппроксимация (13) значительно улучшает результаты при LBE моделировании. При $A = -0.152$ отклонение кривой сосуществования фаз для уравнения состояния Ван-дер-Ваальса от теоретической меньше чем 0.2% в диапазоне температур от критической до $\tilde{T} = 0.4$ [17].

Хорошая изотропность аппроксимации (13) обеспечивает правильные значения поверхностного натяжения на границе раздела фаз и круглую форму капель жидкости в газе и паровых пузырей в жидкости в стационарном случае. При этом выполняется закон Лапласа для скачка давления на кривой поверхности

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) ,$$

где $R_1$ и $R_2$ – главные радиусы кривизны поверхности. Величина поверхностного натяжения σ зависит от уравнения состояния флюида [20].

В [10,17,19] было показано, что при моделировании фазовых переходов в методе LBE для учета действия сил следует использовать метод точной разности (7). Результаты, полученные другими известными методами учета действия сил, гораздо хуже и, более того, зависят от времени релаксации τ, что противоречит физическому смыслу.

## ЧИСЛЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АЛГОРИТМА

В работе [12] было показано, что критерием устойчивости жидкой фазы является условие $\tilde{c} \le \tilde{c}_{\text{кр}} = \sqrt{1+\tilde{\theta}} = 1.1547$, где безразмерная скорость звука $\tilde{c} = c_s \Delta t / h$ (гидродинамическое число Куранта, возникающее для явных конечно-разностных схем уравнений

газодинамики). Здесь $c_s = \sqrt{(\partial P/\partial\rho)_T}$ – скорость звука для изотермических вариантов метода LBE, определяемая УС. Число Куранта записывается в виде $\tilde{c} = \sqrt{k(\partial\tilde{P}/\partial\tilde{\rho})_T}$, где безразмерный параметр $k = P_{\text{кр}}(\Delta t/h)^2/\rho_{\text{кр}}$ определяется характеристиками вещества и величиной шагов по времени и координате. Как обычно, для устойчивости численных расчетов необходимо относительно малое отношение $\Delta t/h$ [12].

## МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ АЛГОРИТМА LBE

Алгоритм метода LBE с фазовыми переходами состоит из нескольких шагов, выполняемых последовательно (метод Яненко – расщепление по физическим процессам):

1. Перенос значений функций распределения вдоль характеристик (1).
2. Вычисление новых значений плотности по (2) и значений функции ρ, используя (10), (11) и уравнение состояния.
3. Вычисление полной силы взаимодействия (13), действующей на узел (то есть, значения градиента псевдопотенциала).
4. Вычисление значений скорости в узле до (3) и после действия сил (8). Вычисление соответствующих равновесных функций распределения (4).
5. Изменение функций распределения в узлах (5) за счет действия оператора столкновений (6) и за счет действия сил, используя метод точной разности (7).

Очевидно, что алгоритм LBE включает в себя вычисления преимущественно в локальном узле расчетной сетки, за исключением переноса частиц и расчета сил взаимодействия между узлами, что позволяет его эффективно распараллелить на большое количество ядер GPU.

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

Графические процессоры на видеокартах – Graphics Processing Unit (GPU) имеют возможность параллельных вычислений на большом количестве ядер. Впервые GPU были использованы для моделирования методом LBE в работе [21]. Однако до настоящего времени параллельные вычисления на одной или нескольких видеокартах применялись только для простых вариантов метода LBE без фазовых переходов [21-24].

В данной работе параллельные расчеты выполнялись на графическом ускорителе GTX-580, имеющем 512 потоковых процессоров (ядер). Все ядра имеют доступ к относительно быстрой общей внутренней памяти объемом 1.5 Гигабайта. В действительности GTX-580 состоит из 16 мультипроцессоров по 32 ядра в каждом. Распараллеливание основано на создании сотен миллионов потоков, каждый их которых осуществляет относительно простые вычисления в узле по одному из уравнений (1) – (13).

На значительное ускорение вычислений влияют не только большое количество ядер GPU, но и ряд других факторов. Основной объем электронных компонентов внутри GPU спроектирован именно под блоки вычислений (до 80%), тогда как у центрального процессора CPU вычислительная часть – всего ~20%. Внутренняя память GPU работает на скорости 192 Гб/с, что на порядок выше, чем у оперативной памяти компьютера. Время переключения ядра между потоками происходит за один такт.

Для распараллеливания алгоритма на большое количество ядер использовалась технология программирования CUDA (Compute Unified Device Architecture).

Первые три шага алгоритма реализованы в виде отдельных параллельных функций (ядер, kernel) для GPU: “MOVE”, “DENSITY” и “FORCE”. Последние два шага алгоритма объединены в одну ядерную функцию условно названную “COLLISION”. Каждая ядерная функция выполняет относительно простые вычисления в каждом узле.

Для варианта метода LBE с фазовыми переходами ускорение нашего алгоритма для GTX-580 достигало 70-90 раз при вычислениях с двойной точностью по сравнению с одним ядром процессора Intel Core 2 Duo с частотой 3.3 ГГц. Для двумерных расчетов использовались расчетные сетки размерами до 3600×3600, а для трехмерных – до 192×192×192.

Архитектура GPU задает организацию вычислений по блокам, в каждом из которых может запускаться до 1024 потока. Каждый поток выполняется одним ядром. Каждый блок выполняется одним мультипроцессором. Совокупность блоков называется решеткой (Grid). Последовательность выполнения огромного ко-

личества потоков и блоков не оговорена, но их полное завершение до вызова следующей ядерной функции можно синхронизовать.

Каждому ядру GPU через внутренние переменные доступны: размеры блока blockDim.x , blockDim.y , blockDim.z и две координаты блока blockIdx.x и blockIdx.y , а также координаты выполняемого в этот момент потока внутри блока threadIdx.x , threadIdx.y , threadIdx.z .

На рис.2 показано разбиение трехмерной расчетной области на блоки. Так как в CUDA для решетки (Grid) третья координата блока не предусмотрена, то по $z$ был организован цикл. При этом начальная координата блока $z0$ играла роль начального параметра для вызова ядерных функций в этом цикле.

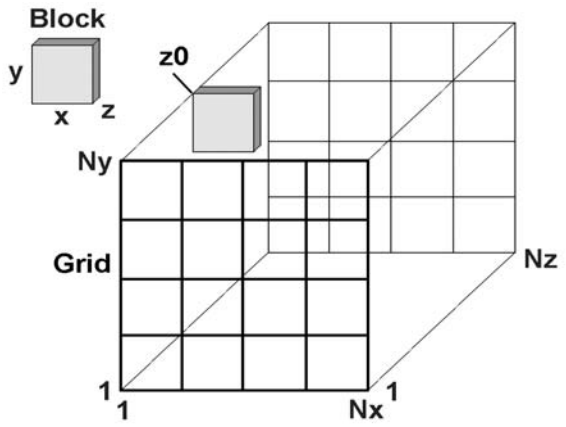


Рис.2

Перед запуском ядерной функции массивы данных должны быть переданы в память GPU или уже там находиться. При запуске ядерной функции блоки распределяются между свободными мультипроцессорами или становятся в очередь. Аналогично – с потоками внутри мультипроцессора.

Все данные хранятся в общей памяти GPU в одномерных массивах. Каждый поток способен вычислить индекс $k$ элемента, для которого данный поток должен выполнить вычисления:

k=(z0+threadIdx.z+1)*ny*nx
+ (blockIdx.y*blockDim.y + threadIdx.y+1)*nx
+ blockIdx.x*blockDim.x+threadIdx.x+1 .

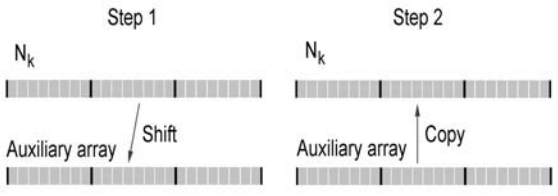


Рис.3

Так как основным ограничением при использовании GPU является объем быстрой внутренней памяти устройства, то с целью оптимизации памяти на шаге переноса использовался всего один буферный массив buff для всех функций распределения $N_k$ (рис.3).

На рис.4 показано время, затрачиваемое функцией “COLLISION” во всех узлах сетки 192×192×192 за один шаг LBE по времени. Оптимальными для этой ядерной функции оказались двумерные блоки размером 16×16.

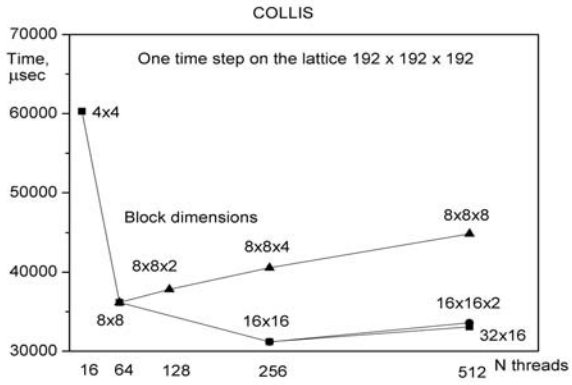


Рис.4

При вычислениях одного шага по времени на устройстве GTX-580 затраты времени на выполнение каждой параллельной функции (kernel) на сетке 192×192×192 показаны в таблице. Для первых четырех функций использовались двухмерные блоки 16×16.

Таблица 1. Затраты времени за шаг LBE.

| Kernel | мкс/шаг | % |
|---|---|---|
| **Collision** | **31194** | **36** |
| **Density** | **10913** | **13** |
| **Force** | **7247** | **~8** |
| **Shift+Copy** | **35460** | **41** |
| **Boundaries** | **1030** | **1** |
| **Total:** | **85844** | **100** |

Чистые затраты времени на выполнение всех ядерных функций за один шаг LBE на один узел составляют 12 нс. С учетом накладных расходов это время увеличивается примерно до 18 нс.

При этом производительность GTX-580 составляет от ~50 до ~80 MNUPS (Million Node Updates Per Second), то есть до 80 миллионов узлов сетки в секунду.

## ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ

Ниже приведены результаты моделирования ряда двухфазных систем жидкость – пар.

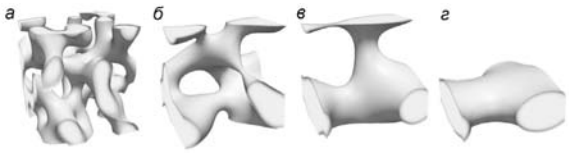


Рис.5 Спинодальная декомпозиция. Паровая фаза показана прозрачной. 2000 (а), 3000 (б), 4000 (в), 7600 (г). Расчетная сетка 96×96×96.

На рис.5 показаны результаты трехмерного моделирования спинодальной декомпозиции первоначально однородного состояния вещества, находящегося под спинодалью, на двухфазную систему жидкость-пар. Со временем мелкомасштабные структуры укрупняются.

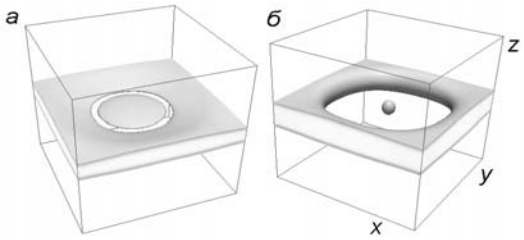


Рис.6 Трехмерное моделирование термокапиллярного эффекта (эффект Марангони) для свободно висящей пленки жидкости. Толщина пленки $d = 16$. Расчетная область 160×160×160.

На рис.6 показаны результаты моделирования термокапиллярного эффекта для свободновисящей пленки, вдоль которой имеется неравномерное распределение температуры. Граничные условия выбраны периодическими.

Распределение температуры вдоль пленки задано в виде $T = T_0 + \Delta T(1 + \cos(\pi(r/R)^2))$ для $r < R$, $T = T_0$ для $r \geq R$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Разрыв пленки жидкости происходит по окружности некоторого радиуса там, где градиент температуры и поверхностного натяжения близки к максимальным значениям. В результате в центре образуется диск из жидкости, который после осцилляций за счет поверхностного натяжения трансформируется в каплю. Затем происходит постепенное испарение капли жидкости.

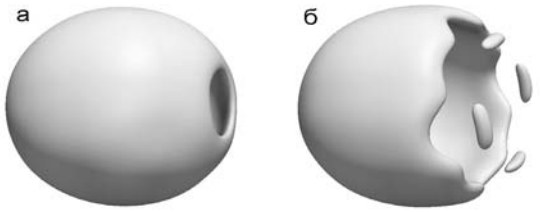


Рис.7 Моделирование разрушения трехмерного тонкостенного пузыря. Сетка 144×144×144.

На рис.7 показан процесс разрушения тонкостенного жидкого пузыря. В этом случае использовался метод LBE для двух компонентов: газ, находящийся внутри пузыря, и жидкий пузырь с возможностью фазового перехода жидкость-пар (испарение капель).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод LBE достаточно прост и эффективен для моделирования широкого круга течений жидкости с возможными фазовыми переходами.

Рассмотренный LBE алгоритм весьма успешно реализован для параллельных вычислений на многопроцессорных графических ускорителях NVIDIA используя технологию программирования CUDA, что дает новые возможности для численного моделирования двухфазных систем.

Для варианта LBE с фазовыми переходами жидкость-пар параллельная реализация нашего алгоритма на GTX-580 при вычислениях с двойной точностью примерно в 70-90 раз быстрее, чем при вычислениях на одном ядре процессора Intel Core 2 Duo с частотой 3.3 ГГц.

Производительность GTX-580 для метода LBE с одним компонентом и фазовыми переходами жидкость-пар составляет до 50-80 миллионов узлов сетки в секунду.

## ЛИТЕРАТУРА

1. McNamara G. R., Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61, N 20. P. 2332–2335.
2. Higuera F. J., Jiménez J. Boltzmann approach to lattice gas simulations. // Europhys. Lett. 1989. V. 9, N 7. P. 663–668.

© Куперштох А.Л.

3. Chen S., Doolen G. D. Lattice Boltzmann method for fluid flow // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1998. V. 30. P. 329–364.
4. Aidun C. K., Clausen J. R. Lattice-Boltzmann Method for Complex Flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2010. V. 42. P. 439–472.
5. Broadwell J. E. Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method // J. Fluid Mech., 1964. V. 19. P. 401–414.
6. Qian Y. H., Orzag S. A., Lattice BGK models for the Navier – Stokes equation: Nonlinear deviation in compressible regimes // Europhys. Lett., 1993, V. 21. P. 255–259.
7. Koelman J. M. V. A. A simple lattice Boltzmann scheme for Navier–Stokes fluid flow // Europhys. Lett. 1991. V. 15, N 6. P. 603–607.
8. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. K. A model for collision process in gases. I. Small amplitude process in charged and neutral one-component system // Phys. Rev. 1954. V. 94, N 3. P. 511–525.
9. Kupershtokh A. L. Calculations of the action of electric forces in the lattice Boltzmann equation method using the difference of equilibrium distribution functions // Доклады VII Межд. научн. конф. "Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей", Санкт–Петербург, 2003, с. 152–155.
10. Kupershtokh A. L. New method of incorporating a body force term into the lattice Boltzmann equation // Proc. of the 5th International EHD Workshop, Poitiers, France, 2004, pp. 241–246.
11. Куперштох А. Л. Учет действия объемных сил в решеточных уравнениях Больцмана // Вестник НГУ: Серия “Математика, механика и информатика”. 2004. Т. 4, № 2. С. 75–96.
12. Kupershtokh A. L. Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // Computers and Mathematics with Applications, 2010. V. 59, N 7. P. 2236–2245.
13. Ginzburg I., Adler P.M. Boundary flow condition analysis for the three-dimensional lattice Boltzmann model // J. Phys. II France. 1994. V. 4. N 2. P. 191–214.
14. Shan X., Chen H. Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components // Phys. Rev. E. 1993. V. 47, N 3. P. 1815–1819.
15. Qian Y. H., Chen S., Finite size effect in lattice-BGK models // International Journal of Modern Physics C. 1997. V. 8, N 4. P. 763–771.
16. Zhang R., Chen H. Lattice Boltzmann method for simulations of liquid-vapor thermal flows // Phys. Rev. E. 2003. V. 67, N 6. P. 066711.
17. Куперштох А. Л. Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана // Вестник НГУ: Серия “Математика, механика и информатика”. 2005. Т. 5, № 3. С. 29–42.
18. Kupershtokh A. L., Karpov D. I., Medvedev D. A., Stamatelatos C. P., Charalambakos V. P., Pyrgioti E. C., Agoris D. P., Stochastic models of partial discharge activity in solid and liquid dielectrics // IET Science, Measurement and Technology. 2007. V. 1, N 6. P. 303–311.
19. Kupershtokh A. L., Medvedev D. A., Karpov D. I. On equations of state in a lattice Boltzmann method // Computers and Mathematics with Applications, 2009. V. 58, N 5. P. 965–974.
20. Kupershtokh A. L. A lattice Boltzmann equation method for real fluids with the equation of state known in tabular form only in regions of liquid and vapor phases // Computers and Mathematics with Applications. V. 61, N 12. P. 3537–3548.
21. Li W., Wei X., Kaufman A. Implementing lattice Boltzmann computation on graphics hardware // Visual Computer. 2003. V. 19. P. 444–456.
22. Tölke J., Krafczyk M. TeraFLOP computing on a desktop PC with GPU for 3D CFD // International Journal of Computational Fluid Dynamics. 2008. V. 22, N 7. P. 443–456.
23. Janßen C., Krafczyk M. Free surface flow simulations on GPGPU using the LBM // Computers and Mathematics with Applications, 2011. V. 61, N 12. P. 3549–3563.
24. Obrecht C., Kuznik F., Tourancheau B., Roux J.-J., Multi-GPU implementation of the lattice Boltzmann method // Computers and Mathematics with Applications. 2011. In press., doi: 10.1016/j.camwa.2011.02.020.