УДК 517.958:536.25

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА И ПОВЕРХНОСТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ИЗОТЕРМ СОРБЦИИ

Гринчик Н.Н., Гишкелюк И.А., Кундас С.П.

Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова, Минск, Беларусь

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Ф11ОБ-100

АННОТАЦИЯ

Рассматривается математическая модель нестационарных процессов взаимосвязанного тепломассопереноса в капиллярно-пористых средах с учетом влияния капиллярных и поверхностных сил, интенсивности массообмена между фазами и термокапиллярных течений. На основе метода взвешенных невязок разработан численный метод решения уравнений тепловлагопереноса в капиллярно-пористых средах. Проведена экспериментальная верификации предложенной математической модели тепловлагопереноса.

ВВЕДЕНИЕ

Тепломассоперенос в капиллярно-пористых средах определяет условия протекания широкого класса технологических процессов и физических явлений в строительной, пищевой, химической и легкой промышленности, а также в агрофизике.

В настоящее время наиболее известен и распространен метод теоретического описания взаимосвязанных процессов тепловлагопереноса на основе теории А. В. Лыкова [1]. Для моделирования неизотермического влагопереноса в капиллярно-пористых телах А. В. Лыков ввел ряд специфических коэффициентов массопереноса: влагопроводности, термовлагопроводности, изотермической массоемкости, критерия фазового перехода известных только для ограниченного класса материалов. Коэффициенты термовлагопроводности и критерий фазового перехода (отношение потока пара к суммарному потоку пара и жидкости) являются функциями толщины исследуемого образца, что осложняет их широкое использование.

В то же время описание тепломассопереноса должно учитывать многофазность фильтрации и поверхностные явления. Исследования в области тепловлагопереноса в капиллярно-пористых телах имеют длительную историю, и к настоящему времени накоплен огромный теоретический и экспериментальный материал. Приоритетных результатов в этом направлении добились школы теплофизиков-гидромехаников – П. А. Ребиндера, Л. Р. Фокина, П. Я. Кочиной, А. В. Лыкова, Д. Р. Филипа, Д. А. де Вреза и др. [2–4].

В настоящее время при описании процессов совместного тепло- и массопереноса в капиллярно-пористых средах даже для простейшего случая не существует единого феноменологического подхода, причем расхождения в физической и математической постановке подобных задач в теориях сушки, сорбции и двухфазной фильтрации носят принципиальный характер. Известные подходы практически не используют достижения в области термодинамики и физики поверхностных явлений.

Необходимость учета особенностей капиллярно-пористых сред достаточно очевидна и тривиальна, но отличается сложностью реализации в феноменологических моделях.

В связи с этим авторами этой работы ставилась цель разработать феноменологическую модель нестационарных процессов взаимосвязанного тепловлагопереноса в капиллярно-пористых средах с учетом влияния капиллярных и поверхностных сил, интенсивности массообмена между фазами и термокапиллярных течений.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВЛАГОПЕРЕНОСА В КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ИЗОТЕРМ СОРБЦИИ

Математическая модель неизотермического влагопереноса строится из следующих соображений. Для капиллярно-пористой среды, в которой содержится водяной пар и жидкость, справедливы уравнения сохранения массы жидкости и водяного пара [5]:

$$\frac{\partial\left(\rho_{\text{liq}}\theta_{\text{liq}}\right)}{\partial t}=-\nabla\left(\rho_{\text{liq}}\boldsymbol{\upsilon}_{\text{liq}}\right)-I \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\left(\rho_{\text{v}}\theta_{\text{v}}\right)}{\partial t}=-\nabla\left(\rho_{\text{v}}\boldsymbol{\upsilon}_{\text{v}}\right)+I \qquad (2)$$

где ρ_{liq} и ρ_{v} – плотность жидкости и водяного пара; $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{liq}}$ и $\boldsymbol{\upsilon}_{\text{v}}$ – скорость движения воды и водяного пара в пористой среде; θv – объемное содержание пара; I –интенсивность массообмена между водой и водяным паром.

Суммируя уравнения (1) и (2), получим следующее уравнение неизотермического влагопереноса:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\nabla\left(\rho_{\text{v}}\boldsymbol{\upsilon}_{\text{v}}\right)-\nabla\left(\rho_{\text{liq}}\boldsymbol{\upsilon}_{\text{liq}}\right) \qquad (3)$$

где $w=\rho_{\text{liq}}\theta_{\text{liq}}+\rho_{\text{v}}\theta_{\text{v}}$ – влагосодержание капиллярно-пористой среды, которое показывает отношение массы воды и водяного пара к полному объему пористой среды.

Из уравнения движения жидкой фазы записываем выражение для интенсивности массообмена между жидкостью и паром I

$$I=-\nabla\left(\rho_{\text{liq}}\boldsymbol{\upsilon}_{\text{liq}}\right)-\frac{\partial\left(\rho_{\text{liq}}\theta_{\text{liq}}\right)}{\partial t}$$

В соответствии с теорией двухфазной фильтрации для вычисления скорости движения водяного пара и жидкости используется обобщенный закон Дарси. Однако, для моделирования неизотермического переноса воды и водяного пара с помощью уравнения (3) также необходимо знание зависимостей давлений жидкости и водяного пара от влагосодержания и температуры. Для определения зависимости давления жидкости от влагосодержания и температуры предложено использовать изотермы сорбции (десорбции) влаги пористой средой при различных температурах $\theta_{\text{e}}=f\left(\varphi,\,T\right)$ и уравнение устанавливающее взаимосвязь между давлением жидкости и относительной влажностью [6]:

$$P_{\text{liq}}=P_{v}-\left(P_{\text{sat}}+\frac{RT\rho_{\text{liq}}}{M}\ln\varphi\right) \qquad (4)$$

где P_{liq} и P_{v} – давление воды и водяного пара в среде; $P_{\text{sat}}(T)$ – давление насыщенного пара над поверхностью воды; R – универсальная газовая постоянная; M – молекулярная масса воды; T – температура; φ – относительная влажность.

Уравнение (4) известно как уравнение Кельвина. Для рассматриваемой задачи справедлива гипотеза локального термодинамического равновесия и, следовательно, использование уравнения Кельвина здесь оправдано.

Относительная влажность и давление водяного пара связаны между собой выражением $\varphi=P_{\text{v}}/P_{\text{sat}}$, а давление насыщенного пара как функцию температуры можно описать определенным аналитическим уравнением $P_{\text{sat}}\left(T\right)$. Отсюда получаем зависимость давления жидкости от давления водяного пара и температуры [7]:

$$P_{\text{liq}}=P_{v}-\left(P_{\text{sat}}\left(T\right)+\frac{RT\rho_{\text{liq}}}{M}\ln\frac{P_{\text{v}}}{P_{\text{sat}}\left(T\right)}\right) \qquad (5)$$

С использованием изотермы сорбции $\theta_{\text{e}}=f\left(\varphi,\,T\right)$, закона для идеального газа $\rho_{\text{v}}=P_{\text{v}}M/\left(RT\right)$, выражения $\varphi=P_{\text{v}}/P_{\text{sat}}$, и учитывая, что $\theta_{\text{v}}=\theta_{\text{sat}}-\theta_{\text{liq}}$, получаем функциональную зависимость содержания влаги от давления водяного пара и температуры:

$$w=\rho_{\text{liq}}f\left(\frac{P_{\text{v}}}{P_{\text{sat}}},\,T\right)+$$
$$+\frac{P_{\text{v}}M}{RT}\left(\theta_{\text{sat}}-f\left(\frac{P_{\text{v}}}{P_{\text{sat}}},\,T\right)\right) \qquad (6)$$

Из уравнения (5) находиться функция, определяющая изменение давления водяного пара от температуры и давления жидкости: $P_{\text{v}}=f'\left(T,P_{\text{liq}}\right)$. С использованием этой функции из выражения (6) получаем зависимость влагосодержания от давления жидкости и температуры:

$$w=\rho_{\text{liq}}f\left(\frac{f'\left(T,P_{\text{liq}}\right)}{P_{\text{sat}}},\,T\right)+$$
$$+\frac{P_{\text{v}}M}{RT}\left(\theta_{\text{sat}}-f\left(\frac{f'\left(T,P_{\text{liq}}\right)}{P_{\text{sat}}},\,T\right)\right) \qquad (7)$$

Соотношение (7) отражает физико-химические свойства жидкости, структурные характеристики пористого тела и необходимо при решении уравнения неизотермического влагопереноса для описания взаимосвязи между влагосодержанием, температурой, давлением жидкости и водяного пара.

С учетом выше изложенного и пренебрегая, вследствие незначительности, движением водяного пара под действием силы тяжести, уравне-

ние неизотермического влагопереноса записывается в виде:

$$\frac{\partial w}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial P_{\text{liq}}}\frac{\partial P_{\text{liq}}}{\partial t}=\nabla\left(\rho_{\text{v}}\frac{K_0K_{\text{v}}}{\eta_{\text{v}}}\frac{\partial P_{\text{v}}}{\partial T}\nabla T\right)+$$
$$+\nabla\left(\rho_{\text{liq}}\frac{K_0K_{\text{liq}}}{\eta_{\text{liq}}}\nabla P_{\text{liq}}+\rho_{\text{v}}\frac{K_0K_{\text{v}}}{\eta_{\text{v}}}\frac{\partial P_{\text{v}}}{\partial P_{\text{liq}}}\nabla P_{\text{liq}}-\right.$$
$$-\rho_{\text{liq}}\frac{K_0K_{\text{liq}}}{\eta_{\text{liq}}}\rho_{\text{liq}}g\nabla D \qquad (8)$$

где K_0 – коэффициент проницаемости пористой среды; $K_{\text{liq}}(\theta_{\text{liq}})$ и $K_{\text{v}}(\theta_{\text{v}})$ – коэффициенты относительной фазовой проницаемости жидкости и водяного пара; η_{liq} и η_{v} – коэффициенты динамической вязкости жидкости и водяного пара; g – ускорение свободного падения; D – координата в вертикальном направлении.

Здесь для нахождения производных влагосодержания по температуре и давлению жидкости используется уравнение (7), а для нахождения производной давления водяного пара по давлению жидкости используется замыкающее соотношение (5).

Для нахождения распределения температуры в капиллярно-пористой среде с учетом теплоты фазовых превращений вода-пар используется уравнение переноса энергии [6]:

$$\frac{\partial(C_vT)}{\partial t}=\nabla\left(\lambda(\theta_{\text{liq}},T)\nabla T\right)+LI \qquad (9)$$

где C_v – объемная теплоемкость капиллярно-пористой среды; λ – эффективный коэффициент теплопроводности; L – удельная теплота фазового перехода.

Вычисление удельной теплоты фазовых превращений осуществлено с учетом теплоты сорбции, которая находится на основании уравнения Клапейрона – Клаузиуса, и зависимости давления водяного пара от температуры и давления жидкости $P_{\text{v}}=f'(T,P_{\text{liq}})$:

$$L=r_0-\frac{RT^2}{M}\left(\frac{\partial\ln f'(T,P_{\text{liq}})}{\partial T}\right)$$

где r_0 – теплоты фазового перехода свободной воды в водяной пар.

В случае испарения влаги с поверхности капиллярно-пористой среды, к уравнению переноса влаги задается граничное условие вида:

$$P_{\text{liq}}=f''(\varphi,T)+\left(P_{\text{sat}}(T)+\frac{RT\rho_{\text{liq}}}{M}\ln\frac{f''(\varphi,T)}{P_{\text{sat}}(T)}\right)$$

Для учета влияния остальных климатических факторов на процессы тепломассопереноса к полученным уравнениям формулируются общеизвестные граничные условия первого и второго рода.

Таким образом, предложена математическая модель тепловлагопереноса базирующаяся на уравнениях двухфазной фильтрации, изотермах сорбции влаги, термодинамических уравнениях Кель¬вина и Клапейрона – Клаузиуса. В предложенной модели, в отличие от известных разработок, вычисление параметров массопереноса основано на изотермах сорбции, термодинамических уравнениях и уравнениях двухфазной фильтрации, а не на использовании эмпирических коэффициентов, что приводит к трудностям при практических расчетах. Кроме того, в большинстве предыдущих работ не учитывается теплота сорбции, в то время как ее вклад в перенос энергии в пористой среде может быть существенным.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВЛАГОПЕРЕНОСА

При численном решении, полученные уравнения (8) и (9), записываются в виде системы уравнений тепловлагопереноса

$$C_{\text{v}}\frac{\partial T}{\partial t}-L\frac{\partial\theta_{\text{liq}}}{\partial t}+L\rho_{\text{liq}}\nabla\upsilon_{\text{liq}}-\nabla(\lambda\nabla T)=0$$
$$C_{\text{hv}}\frac{\partial T}{\partial t}+C_{\text{wp}}\frac{\partial P_{\text{liq}}}{\partial t}-\nabla(K_{\text{hv}}\nabla T)-$$
$$-\nabla\left(K_{\text{wv}}\nabla P_{\text{liq}}-K_{\text{w}}\rho_{\text{liq}}g\nabla D\right)=0 \qquad (10)$$

Коэффициенты уравнений (10) находятся из выражений: $C_{\text{hv}}=\partial w/\partial T$; $K_{\text{w}}=\rho_{\text{liq}}K_0K_{\text{liq}}/\eta_{\text{liq}}$; $C_{\text{wp}}=\partial w/\partial P_{\text{liq}}$ и $K_{\text{hv}}=\rho_{\text{v}}K_0K_{\text{v}}/\eta_{\text{v}}\,\partial P_{\text{v}}/\partial T$.

При решении системы уравнений (10) температура и давление жидкости аппроксимируются полиномами [8]:

$$T\approx\tilde{T}=\sum_{j=1}^{M}T_jN_j$$
$$P_{\text{liq}}\approx\tilde{P}_{\text{liq}}=\sum_{j=1}^{M}P_{\text{liq}j}N_j$$

где T_j и $P_{\text{liq}j}$ – значение температуры и давления жидкости в j-ом узле; N_j – базисная функция в j-ом узле; M – общее количество узлов.

Используя метод взвешенных невязок в постановке Галеркина, система уравнений

неизотермического влагопереноса записывается в виде:

$$\int_{\Omega}\begin{vmatrix} N_i C_{\mathrm{v}} & 0 \\ N_i C_{\mathrm{hv}} & N_i C_{\mathrm{wp}} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \tilde{P}_{\mathrm{liq}}}{\partial t} \end{vmatrix}\partial\Omega - \int_{\Omega}\begin{vmatrix} N_i L \dfrac{\partial \theta_{\mathrm{liq}}}{\partial t} \\ 0 \end{vmatrix}\partial\Omega +$$

$$+\int_{\Omega}\begin{vmatrix} N_i L \rho_{\mathrm{liq}} \nabla \upsilon_{\mathrm{liq}} \\ 0 \end{vmatrix}\partial\Omega - \int_{\Omega}\begin{vmatrix} 0 \\ \nabla N_i K_{\mathrm{w}} \rho_{\mathrm{liq}} g \nabla D \end{vmatrix}\partial\Omega +$$

$$+\int_{\Omega}\begin{vmatrix} N_i \nabla \lambda \nabla N_j & 0 \\ N_i \nabla K_{\mathrm{hv}} \nabla N_j & N_i \nabla K_{\mathrm{wv}} \nabla N_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} T_j \\ P_{\mathrm{liq}\,j} \end{vmatrix}\partial\Omega -$$

$$-\int_{\Gamma}\begin{vmatrix} N_i \alpha T_{\infty} \\ 0 \end{vmatrix}\partial\Gamma + \int_{\Gamma}\begin{vmatrix} N_i \alpha N_j & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} T_j \\ P_{\mathrm{liq}\,j} \end{vmatrix}\partial\Gamma -$$

$$-\int_{\Gamma}\begin{vmatrix} N_i q_h \\ N_i \left(q_{\mathrm{v}} + q_{\mathrm{liq}}\right) \end{vmatrix}\partial\Gamma - \int_{\Gamma}\begin{vmatrix} N_i \varepsilon \sigma T_{\infty}^4 \\ 0 \end{vmatrix}\partial\Gamma +$$

$$+\int_{\Gamma}\begin{vmatrix} N_i \varepsilon \sigma N_j^{\,4} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} T_j^4 \\ P_{\mathrm{liq}\,j} \end{vmatrix}\partial\Gamma = 0 \qquad (8)$$

Для дискретизации по времени значения температуры, давления жидкости, влагосодержания, скорости и их производные по времени в момент времени $t=t_n+\gamma\Delta t_n$ аппроксимируются выражениями [8]:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|^{n+\gamma} \approx \frac{T^{n+1}-T^n}{\Delta t_n}, \quad T^{n+\gamma} = (1-\gamma)T^n + \gamma T^{n+1}$$

$$\left.\frac{\partial P_{\mathrm{liq}}}{\partial t}\right|^{n+\gamma} \approx \frac{P_{\mathrm{liq}}^{n+1}-P_{\mathrm{liq}}^n}{\Delta t_n}, \quad P_{\mathrm{liq}}^{n+\gamma} = (1-\gamma)P_{\mathrm{liq}}^n + \gamma P_{\mathrm{liq}}^{n+1}$$

$$\left.\frac{\partial \theta_{\mathrm{liq}}}{\partial t}\right|^{n+\gamma} \approx \frac{\theta_{\mathrm{liq}}^{n+1}-\theta_{\mathrm{liq}}^n}{\Delta t_n}$$

$$\upsilon_{\mathrm{liq}}^{n+\gamma} = (1-\gamma)\upsilon_{\mathrm{liq}}^n + \gamma \upsilon_{\mathrm{liq}}^{n+1} \qquad (11)$$

Подставляя в систему уравнений (10) полученные аппроксимации (11) и применяя квадратурную формулу Гаусса – Лобатто для вычисления подынтегральных выражений, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно P_{liq}^{n+1} и T^{n+1}. Решение этой системы уравнений методом Ньютона – Рафсона дает значения давления жидкости и температуры в момент времени $n+1$.

Для верификации предложенной математической модели тепловлагопереноса численно решалась задача неизотермического влагопереноса в почве. Полученные результаты сравнивались с экспериментальными измерениями метеорологических условий, распределения влаги и температуры в почве, представленными в работе [9]. Из сравнения результатов моделирования неизотермического влагопереноса с экспериментальными измерениями (рис.1) следует, что рассчитанные значения влагосодержания находятся в пределах 95 % доверительного интервала, построенного для экспериментальных данных.

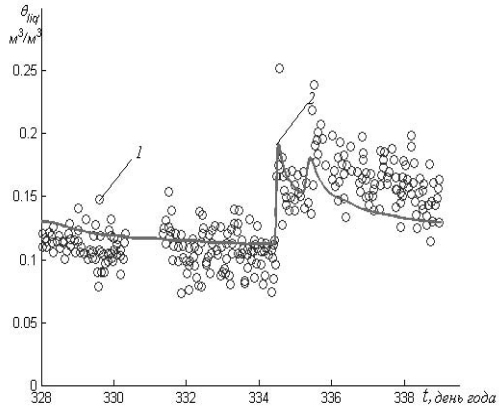

Рис.1 Изменение объемного влагосодержания почвы на глубине 2 см в течении двенадцати дней: 1 – экспериментальные данные; 2 – результаты моделирования

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель тепловлагопереноса в капиллярно-пористых средах базирующаяся на уравнениях двухфазной фильтрации, изотермах сорбции влаги, термодинамических уравнениях Кельвина и Клапейрона – Клаузиуса. В предложенной модели, в отличие от известных разработок [3, 5, 9, 10], вычисление параметров массопереноса основано на изотермах сорбции, термодинамических уравнениях и уравнениях двухфазной фильтрации, а не на использовании эмпирических коэффициентов, что приводит к трудностям при практических расчетах. Разработан численный метод решения уравнений тепловлагопереноса, базирующийся на методе взвешенных невязок.

Полученные результаты могут быть использованы для моделирования тепломассопереноса в различных технологических процессах и природных явлений в строительной, пищевой и химической промышленности, а также в агрофизике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. Теория сушки. – М.: Энергия, 1968. – 471 с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
3. Philip J.R., de Vries D.A. Moisture movement in porous media under temperature gradients // Transactions American Geophysical Union. – 1957. – Vol. 38, № 5. – P. 222–231.
4. de D.A. Vries, The theory of heat and moisture transfer in porous media revisited // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1987. – Vol. 30, № 7. – P. 1343–1350.
5. Grifoll J., Gastó J.M., Cohen Y. Non-isothermal soil water transport and evaporation // Advances in Water Resources. – 2005. – Vol. 28. – P. 1254–1266.
6. Гринчик, Н.Н. Процессы переноса в пористых средах, электролитах, мембранах. – Минск, – 1991. – 251 с.
7. Кундас С.П., Гринчик Н.Н., Гишкелюк И.А., Адамович А.Л. Моделирование процессов термовлагопереноса в капиллярно-пористых средах. – Минск: ИТМО НАН Беларуси, 2007. – 292 с.
8. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
9. Saito H., Simunek J., Mohanty B.P. Numerical Analysis of Coupled Water, Vapor, and Heat Transport in the Vadose Zone // Vadose Zone Journal. – 2006. – № 5. – P. 784–800.
10. Nassar I.N., Horton R. Water transport in unsaturated nonisothermal salty soil: II. Theoretical develop-ment // Soil Sci. Soc. Am. J. – 1989. – Vol. 53. – P. 1330–1337.