УДК 532.5

КРАЕВЫЕ ВОЛНЫ НА ВДОЛЬБЕРЕГОВОМ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ НАД СТУПЕНЧАТЫМ ШЕЛЬФОМ

Авербух Е.Л.[1], Куркина О.Е.[2,1], Куркин А.А.[1]

[1]*Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, Н.Новгород, Россия*
[2]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», гН.Новгород, Россия*

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации мероприятий 1.2.1 и 1.3.2 ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы, а также при поддержке грантов Президента РФ для молодых российских ученых – докторов наук (МД-99.2010.5), и РФФИ 10 05 00199а.

АННОТАЦИЯ

Представлен теоретический анализ эффектов вдольберегового течения при распространении краевых волн в приближении линейной мелкой воды над цилиндрическим шельфом. Подробные расчеты проведены для модели «шельфа-ступеньки» с постоянным течением во вдольбереговой зоне. Проанализировано решение краевой задачи, построены дисперсионные диаграммы и поперечная к берегу структура краевых волн для различных волновых мод. Проведен анализ влияния вдольберегового течения на характеристики линейных краевых волн. Продемонстрирован допплеровский сдвиг частот для различных волновых мод при различных значениях числа Фруда. Показано, что течение при параметрах, близких к реальным параметрам в океане, слабо влияет на дисперсионные свойства и поперечную к берегу структуру краевых волн.

ВВЕДЕНИЕ

Перепады глубин в прибрежной зоне океана способствуют захвату волновой энергии в ограниченных по протяженности областях и ведут к трансформации длинных волн, которые самым существенным образом определяют динамику этой зоны. Краевые волны являются неотъемлемой частью волнового режима прибрежной зоны. Так, например, именно они ответственны за появление периодических форм береговой линии, часто наблюдаемых в природе.

Существуют множество работ посвященных исследованию динамики краевых волн над дном сложной геометрии и нелинейным эффектам. Однако вопрос влияния вдольберегового течения на динамику топографических захваченных волн остается актуальным.

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ И СТРУКТУРА МОДЫ

Линейная теория длинных краевых волн основана на представлении смещения водной поверхности η в следующем виде [1]:

$$\eta(x,y,t) = \mathrm{Re}\{F(y)\exp i(\omega t - kx)\},$$

где ω – частота, k – вдольбереговое волновое, F(y) – структура моды краевой волны, которая находится как решение линейной краевой задачи вида:

$$\frac{d^2F}{dy^2} + \frac{1}{h}\frac{dh}{dy}\frac{dF}{dy} + \left(\frac{\omega^2}{gh} - k^2\right)F = 0, \qquad (1)$$

здесь h(y) задает форму профиля рельефа дна на цилиндрическом шельфе. На берегу ставится условие отсутствия потока массы через береговую границу. На бесконечности структура мод стремится к нулевому значению для захваченных волн.

Предполагаем также, что у вдольбереговой компоненты скорости есть постоянная сдвиговая составляющая $V_0(y)$. При этом будем рассматривать решение линейного варианта системы уравнений мелкой воды над

© Авербух Е.Л., Куркина О.Е., Куркин А.А.

цилиндрическим дном в виде бегущей волны [2,3].

Уравнение, аналогичное (1), описывающее поперечную к берегу структуру краевых волн в бассейне с течением имеет вид:

$$\frac{gh}{\sigma^2}\frac{d^2F}{dy^2}+\left(\frac{g}{\sigma^2}\frac{dh}{dy}-\frac{2gh}{\sigma^3}\frac{d\sigma}{dy}\right)\frac{dF}{dy}+\left(1-\frac{ghk^2}{\sigma^2}\right)F=0 \quad (2)$$

где $\sigma(y)=\omega-V_0(y)k$. Граничные условия формулируются также, как и для (1).

Далее рассматриваются волны, фазовые скорости $c=\frac{\omega}{k}$ которых действительны, тем самым из рассмотрения исключаются нарастающие неустойчивые решения, и мы ограничиваемся краевыми волнами и нейтральными сдвиговые волны, без сдвиговой неустойчивости. Отметим, что попутные волны имеют фазовые скорости $c^+=\frac{\omega}{k}>\max V_0(x)=V_{0M}$, противопутные – $c^-<\min V_0(x)=V_{0m}$.

Краевая задача для уравнения (1) имеет аналитические решения (набор собственных мод F(y) и дисперсионное соотношение в явном или неявном виде), в том числе в виде специальных функций, лишь для небольшого набора модельных профилей шельфа, заданных аналитическими функциями, наиболее популярные из этих теоретических моделей перечислены в [1]. Среди этих аналитических форм аппроксимации рельефа в зоне шельфа – континентального склона наиболее простыми являются бесконечный откос и шельф-ступенька. Однако аналитические решения краевой задачи для уравнения (2) с учетом вдольберегового течения ранее построены не были, даже для простейших форм дна и профиля потока.

Рассмотрим влияние вдольберегового течения на дисперсионное соотношение на примере шельфа-ступеньки с постоянным вдольбереговым течением V_0 = const, ограниченным полосой $0\le y\le r$.

Профиль глубины для модели бесконечного океана с шельфом постоянной глубины («шельф – ступенька») имеет вид (рис.1):

$$h(y)=\begin{cases}h_1, & 0\le y<l,\\ h_2, & y\ge l,\end{cases}\qquad h_2>h_1.$$

Уравнение (1) для данной модели шельфа будет иметь вид:

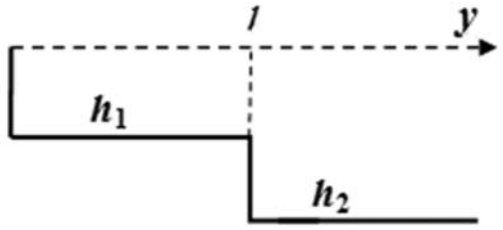

Рис.1 Модель «шельфа-ступеньки»

$$\frac{d^2F_j}{dy^2}+\left(\frac{\omega^2}{gh_j}-k^2\right)\eta_j(y)=0,$$

где j = 1,2 (индекс 1 соответствует шельфу, 2 – открытому океану).

Структура моды для такого шельфа без учета течения описывается выражениями [1]:

$$F_1(y)=\cos(\mu y),$$

$$F_2(y)=\cos(\mu l)\exp\left(-\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{gh_2}}(y-l)\right), \quad (3)$$

где $\mu^2=\frac{\omega^2}{gh_1}-k^2$.

Дисперсионное соотношение задается неявным уравнением

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{gh_1}-k^2}\ \mathrm{tg}\left(l\sqrt{\frac{\omega^2}{gh_1}-k^2}\right)=\frac{h_2}{h_1}\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{gh_2}}$$

С учетом постоянного течения V_0 = const вдоль оси x в полосе $0\le y\le r$ уравнение (2) имеет в общем случае три области постоянных коэффициентов, в каждой из которых оно записывается в виде:

$$\frac{d^2F_j}{dy^2}+\lambda_j^2F_j=0,\quad j=1,2,3.$$

На границах этих областей при y = r и y = *l* должны выполняться условия непрерывности смещения и сохранения потока:

$$F_1=F_2,$$

$$F_2=F_3,$$

$$h_1\frac{dF_{1(2)}}{dy}=h_2\left.\frac{dF_{2(3)}}{dy}\right|_{y=l},$$

$$\frac{dF_{2(1)}}{dy}=\left.\frac{dF_{3(2)}}{dy}\right|_{y=r}.$$

Коэффициенты уравнений λ_j^2 задаются так:
при r < l:

$$\lambda_1^2 = \frac{(\omega - V_0 k)^2}{gh_1} - k^2, \qquad 0 \le y \le r,$$

$$\lambda_2^2 = \frac{\omega^2}{gh_1} - k^2, \qquad r < y < l,$$

$$\lambda_3^2 = \frac{\omega^2}{gh_2} - k^2, \qquad l \le y < \infty,$$

при r > l:

$$\lambda_1^2 = \frac{(\omega - V_0 k)^2}{gh_1} - k^2, \qquad 0 \le y < l,$$

$$\lambda_2^2 = \frac{(\omega - V_0 k)^2}{gh_2} - k^2, \qquad l \le y \le r,$$

$$\lambda_3^2 = \frac{\omega^2}{gh_2} - k^2, \qquad r < y < \infty.$$

Нетрудно построить собственные функции и дисперсионные соотношения для этих случаев.

При r < l:
структура моды:

$$F_1(y) = \cos(\lambda_1 y), \quad 0 \le y \le r,$$
$$F_2(y) = C_{21}\cos(\lambda_2 y) + C_{22}\sin(\lambda_2 y), r < y < l,$$
$$F_3(y) = C_3 \exp(-p_3 y), \quad l \le y < \infty,$$

где

$$C_{22} = \frac{\dfrac{\cos(\lambda_1 r)}{\cos(\lambda_2 r)} - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\dfrac{\sin(\lambda_1 r)}{\sin(\lambda_2 r)}}{tg(\lambda_2 r) + ctg(\lambda_2 r)},$$

$$C_{21} = -C_{22} tg(\lambda_2 r) + \frac{\cos(\lambda_1 r)}{\cos(\lambda_2 r)},$$

$$C_3 = \exp(p_3 l)(C_{21}\cos(\lambda_2 l) + C_{22}\sin(\lambda_2 l))$$

$$p_3 = \sqrt{-\lambda_3^2}$$

дисперсионное соотношение:

$$h_1\lambda_2(-C_{21}\sin(\lambda_2 l) + C_{22}\cos(\lambda_2 l)) =$$
$$= -h_2 p_3 C_3 \exp(-p_3 l)$$

При r > l: структура моды:

$$F_1(y) = \cos(\lambda_1 y), \quad 0 \le y < l,$$
$$F_2(y) = \tilde{C}_{21}\exp(-p_2 y) + \tilde{C}_{22}\exp(p_2 y), \quad l \le y \le r,$$
$$F_3(y) = \tilde{C}_3 \exp(-p_3 y), \quad r < y < \infty,$$

где

$$\tilde{C}_{21} = \frac{1}{2}\exp(p_2 l)(\cos(\lambda_1 l) + d\sin(\lambda_1 l))$$

$$\tilde{C}_{22} = \frac{1}{2}\exp(-p_2 l)(\cos(\lambda_1 l) - d\sin(\lambda_1 l)),$$

$$\tilde{C}_3 = \tilde{C}_{21}\exp((p_3 - p_2)y) + \tilde{C}_{22}\exp((p_3 + p_2)y)$$

$$d = \frac{h_1\lambda_1}{h_2 p_2}, \quad p_2 = \sqrt{-\lambda_2^2}, p_3 = \sqrt{-\lambda_3^2}$$

дисперсионное соотношение:

$$p_2(-\tilde{C}_{21}\exp(-p_2 r) + \tilde{C}_{22}\exp(p_2 r)) =$$
$$= -p_3\tilde{C}_3\exp(-p_3 r)$$

При r = l моды краевых волн имеют вид (5), но с $\mu^2 = \lambda_1^2$, а дисперсионное соотношение задается неявно уравнением:

$$\lambda_1 h_1 tg(\lambda_1 l) = p_3 h_2 \quad .$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Вид дисперсионных кривых для шельфа-ступеньки с параметрами, характерными для Калифорнийского шельфа [4] (h1 = 600 м, h2 = 3600 м, l = 250 км, r = 0.5l; l; 1.5l, V_0 = 1 м/с) очень близки к дисперсионным кривым без течения. Однако, дисперсионные кривые для случая без вдольберегового течения, являются симметричными для положительных и отрицательных волновых чисел, а учет течения вносит асимметрию. Эффект Доплера приводит к тому, что частоты увеличиваются для попутных волн и уменьшаются для встречных. Эффект становится заметнее для более высокочастотных и высокомодовых волн. Однако для данного случая доплеровский сдвиг частот незначителен, и эффект течения практически не проявляется.

Для анализа влияния течения на волновые процессы удобно использовать число Фруда,

которое в случае произвольной формы дна и профиля течения вводится как

$$Fr = \left(\frac{V_0(y)}{\sqrt{gh(y)}} \right)_{max} ,$$

а в нашем случае будет выражаться в виде

$$Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gh_1}} ,$$

и для параметров Калифорнийского шельфа число Фруда оказывается Fr=0.013<< 1.

Если использовать данные в работе [2] с конфигурацией внешних условий h_1 = 3 м, h_2 = 6 м, l = 300 м, r = 0.5l, V_0 = 0.7 м/с. В этом случае Fr=0.148, и влияние течения на дисперсионные свойства и структуру мод краевых волн оказывается весьма значительным. На рис.2 представим структуру мод краевых волн, где пунктир – без учета течения, сплошная линия – при r = 0.5l, V_0 = 0.7 м/с).

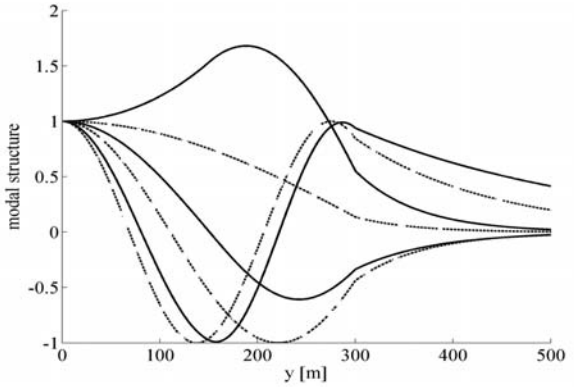

Рис.2 Поперечная к берегу структура краевых волн трех низших волн, распространяющихся над шельфом-ступенькой

Подводя итог проделанной работы, можно отметить что течение при малых числах Фруда, слабо влияет на дисперсионные свойства и поперечную к берегу структуру краевых волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович А.Б. Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение/ А.Б. Рабинович.- СПб.: Гидрометеоиздат, 1993. -325 с.
2. Falques A. Edge waves on a longshore shear flow / A. Falques, V. Iranzo // Phys. Fluids - A 4 (10), -1992, -2169-2190.
3. Kirby J.T. Evolution equations for edge waves and shear waves on longshore uniform beaches / J.T. Kirby, U. Putrevu, H.T. Ozkan-Haller// Proc. 26th Int. Conf. Coastal Engineering. -1998. -P. 203 – 216.
4. Snodgrass F.E. Long-period waves over California's continental borderland / F.E. Snodgrass., W.H. Munk, G.R. Miller// J. Marine Research. -1962. -V. 20. -P. 3 – 30.