УДК 532.546

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУХФАЗНОГОТЕЧЕНИЯ В ДВУМЕРНОМ ПЛАСТЕ

Гамзаев Х.М., Шукюрова Н.А., Бабаева Е.А.

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия, Баку, Азербайджан
Академия Наук Азербайджана Институт Математики и Механики, Баку, Азербайджан

АННОТАЦИЯ

Рассматривается процесс двухфазного течения в пласте, образующийся при вытеснении нефти из пласта водой. Поставлена обратная задача, связанная с восстановлением граничного условия для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Предлагается численный метод решения задачи, основанный на обращении системы линейных алгебраических уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что метод заводнение – нагнетание воды в пласт с целью вытеснения нефти из пласта, является одним из основных технологических методов разработки нефтяных месторождений. Роль воды в процессе вытеснения очень сложна. С одной стороны, она являясь вытесняющим агентом способствует повышению коэффициента нефтеотдачи, с другой, прорываясь к скважинам и обводняя их, снижает эффективность разработки месторождения. В связи с этим очень важное значение имеет использование математических моделей процессов вытеснения нефти из пласта водой, как при проектировании систем разработки, так и в периоде эксплуатации нефтяных месторождений. При моделировании процессов вытеснения нефти из пласта водой традиционно используется система уравнений, включающая в себя дифференциальные уравнения неразрывности фильтрационных потоков нефти и воды, уравнения движения жидкостей, уравнения состояния пористой среды и жидкостей [1]. При этом геометрическая конфигурация пласта, а также свойства породы и жидкостей считаются известными. Система уравнений дополняется начальными и граничными условиями, описывающими начальное состояние пласта и взаимодействие пласта с окружающей областью. Обычно граничные условия задаются относительно давления или расхода жидкостей (или их комбинации) на скважинах и на внешней границе пласта.

Однако необходимо отметить очень важное обстоятельство относительно граничного условия на внешней границе пласта. Дело в том, что основными источниками информации о процессах, происходящих в пласте при разработке, являются эксплуатационные и нагнетательные скважины, где давления и расходы жидкостей доступны к непосредственным измерениям. Однако гидродинамические процессы, происходящие на внешней границе пласта при разработке не доступны для непосредственного наблюдения. Поэтому точное представление условия на внешней границе пласта практически не представляется возможным.

В связи с этим для практики разработки нефтяных месторождений очень важное значение имеет вопрос моделирования процесса вытеснения нефти из пласта водой только на основании информации, полученной из скважин.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть горизонтально расположенный двумерный нефтяной пласт с постоянной мощностью H в круговой области $\overline{G} = \{0 \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi\}$, разрабатывается системой скважин в режиме заводнения. Вода, закачиваемая через нагнетательные скважины в пласт, не смешивается с нефтью и в пласте образуется двухфазное течение. Предположим, что одна из нагнетательных скважин находится в центре пласта, а остальные скважины расположены в произвольных точках пласта. Ввиду того, что размеры скважин намного меньше размера пласта, можно пренебречь размерами скважин, представляя их точечными стоками (источниками) с мощностями, равными расходам реальных скважин[1]. Тогда представляя скважины, за исключением центральной, точечными стоками (источниками), описываемыми функцией Дирака, математическую модель двухфазного течения не-

© Гамзаев Х.М., Шукюрова Н.А., Бабаева Е.А.

сжимаемых жидкостей в пласте можно представить в следующем виде

$$H\frac{\partial mS_w}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH\frac{kk_w}{\mu_w}\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H\frac{kk_w}{\mu_w}\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{L-1}Q_l^w\delta(r-r_l,\theta-\theta_l),$$

$$H\frac{\partial mS_o}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH\frac{kk_o}{\mu_o}\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H\frac{kk_o}{\mu_o}\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{L-1}Q_l^o\delta(r-r_l,\theta-\theta_l),\quad(1)$$

$$S_w+S_o=1,$$

где $P(r,\theta,t)$ - давление в пласте, $k(r,\theta)$ - абсолютная проницаемость пласта, $k_o(S_w),\mu_o$ - относительная фазовая проницаемость и вязкость нефти, $k_w(S_w),\mu_w$ - соответствующие обозначения для воды, S_w - водонасыщенность, S_o - нефтенасыщенность, $m=m_0+\beta(P-P_0)$ - пористость пласта, β - коэффициент упругости пласта, Q_l^o - дебит l - ой скважины по нефти, Q_l^w - дебит l - ой скважины по воде, L - общее число скважин, $\delta(r-r_l,\theta-\theta_l)$ - функция Дирака, (r_l,θ_l) - координаты l - ой скважины.

Дебит нагнетательной скважины считается отрицательным, а дебит эксплуатационной скважины считается положительным. Систему (1) приведем к системе двух уравнений относительно водонасыщенности $S=S_w$ и давления

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r}f(r,\theta,t),\quad(2)$$

$$\frac{\partial mS}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r}\varphi(r,\theta,t),\quad(3)$$

где $\sigma=\frac{k}{\beta}(\frac{k_o}{\mu_o}+\frac{k_w}{\mu_w}),\lambda=\frac{kk_w}{\mu_w}$,

$$=\sum_{l=1}^{L-1}(q_l^w+q_l^o)\delta(r-r_l,\theta-\theta_l)$$

$$\varphi=\sum_{l=1}^{L-1}q_l^w\delta(r-r_l,\theta-\theta_l),$$

Начальные распределения давления и водонасыщенности, а также расход и насыщенность воды на центральной скважине считаем заданными. Тогда для системы (2), (3) будем иметь следующие условия

$$P\big|_{t=0}=\chi(r,\theta),\quad(4)$$

$$S\big|_{t=0}=\psi(r,\theta),\quad(5)$$

$$2\pi r\sigma\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=r_w}=q_0^w,\quad(6)$$

$$S\big|_{r=r_w}=S_w.\quad(7)$$

Очевидно, что для корректности задачи (2)-(7) необходимо иметь условия периодичности решения системы (2)-(7) и условие на внешней границе пласта. Условия периодичности решения можно записать в виде

$$P(r,0,t)=P(r,2\pi,t),\quad(8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}=\frac{\partial P}{\partial\theta}\Big|_{\theta=2\pi},\quad(9)$$

$$S(r,0,t)=S(r,2\pi,t).\quad(10)$$

Однако в связи с тем, что давление и расход жидкостей на внешней границе пласта не доступны к непосредственным измерениям и не могут регулироваться, сформулировать граничное условие, соответствующее взаимодействию пласта с окружающей областью не представляется возможным.

Предположим, что на скважине, находящейся в центре пласта, наряду с расходом воды одновременно задается и давление на забое. Тогда взамен условия на внешней границе пласта будем иметь дополнительное условие при $r=r_w$

$$P\big|_{r=r_w}=p_w(t)\quad(11)$$

Таким образом, задача о нахождении распределения давления $P(r,\theta,t)$ и водонасыщенности $S(r,\theta,t)$ в процессе разработки пласта сводится к решению системы (2), (3) при выполнении условий (4)-(11).

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача (2)-(11) относится к классу граничных обратных задач [2,3]. Для численного решения задачи (2)-(11) введем равномерную разностную сетку по переменной t на отрезке $0 \le t \le T$

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0,1,2.....N_t$$

с шагом $\Delta t = T / N_t$ и в соответствии с методом покомпонентного расщепления [4] задачи (2)-(11) в каждом отрезке $[t_n, t_{n+1}]$ редуцируем к системе последовательно решаемых одномерных задач

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma\frac{\partial P}{\partial r}\right) - \frac{1}{2r}f$$

$$t_n < t \le t_{n+\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

$$P\Big|_{r=r_w} = p_w(t), \tag{13}$$

$$2\pi r\sigma\frac{\partial P}{\partial r}\Big|_{r=r_w} = q_w^0, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sigma\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{2r}f$$

$$t_{n+\frac{1}{2}} < t \le t_{n+1}, \tag{15}$$

$$P\Big|_{\theta=0} = P\Big|_{\theta=2\pi}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = \frac{\partial P}{\partial \theta}\Big|_{\theta=2\pi} \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial mS}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial P}{\partial r}\right) - \frac{1}{2r}\varphi$$

$$t_n < t \le t_{n+\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

$$S\Big|_{r=r_w} = S_w, \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial mS}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda\frac{\partial P}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{2r}\varphi,$$

$$t_{n+\frac{1}{2}} < t \le t_{n+1}, \tag{20}$$

$$S\Big|_{\theta=0} = S\Big|_{\theta=2\pi} \tag{21}$$

$$n = 0,1,2,...N_t - 1$$

$$P(r,\theta,0) = \chi(r,\theta), \tag{22}$$

$$S(r,\theta,0) = \psi(r,\theta). \tag{23}$$

Из схемы расщепления следует, что для вычисления $P(r,\theta,t_{n+1})$ и $S(r,\theta,t_{n+1})$ по заданным $P(r,\theta,t_n)$, $S(r,\theta,t_n)$ $n = 0,1,2,...N_t - 1$, необходимо:

1. Найти $P(r,\theta,t_{n+1/2})$ - решение одномерной обратной задачи (12)- (14) при $t = t_{n+1/2}$.
2. По вычисленному $P(r,\theta,t_{n+1/2})$ найти $P(r,\theta,t_{n+1})$ - решение задачи (15)-(17) при $t = t_{n+1}$.
3. По вычисленному $P(r,\theta,t_{n+1})$ найти $S(r,\theta,t_{n+1/2})$ - решение задачи (18)-(19) при $t = t_{n+1/2}$.
4. Найти $S(r,\theta,t_{n+1})$ - решение одномерной задачи (20)-(21) при $t = t_{n+1}$.

Для численного решения системы одномерных задач (12)-(23) используем метод конечных разностей. С этой целью введем неравномерную сетку в области $\overline{G}$

$$\overline{\omega} = \{(r_i,\theta_j) \in \overline{G},\ r_i = r_{i-1} + \Delta r_i,\ 1 \le i \le N_r,$$

$$r_0 = r_w,\ r_{N_r} = R,\ \theta_j = \theta_{j-1} + \Delta\theta_j,$$

$$1 \le j \le N_\theta,\ \theta_0 = 0,\ \theta_{N_\theta} = 2\pi\ \}$$

и задачу (12)-(14) аппроксимируем на сетке $\overline{\omega}$

$$r_i\frac{p_{i,j}^{n+1/2} - p_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta r_{i+1/2}}$$

$$(r_{i+1/2}\sigma_{i+1/2,j}\frac{p_{i+1,j}^{n+1/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta r_{i+1}}$$

$$-r_{i-1/2}\sigma_{i-1/2,j}\frac{p_{i,j}^{n+1/2} - p_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta r_i}) - \frac{f_{i,j}^n}{2},$$

$$1 \le i \le N_r - 1$$

$$p_{0,j}^{n+1/2} = p_w^{n+1/2},$$

$$r_w\frac{p_{0,j}^{n+1/2} - p_{0,j}^n}{\Delta t} = \frac{2}{\Delta r_1}$$

$$(r_{1/2}\sigma_{1/2,j}\frac{p_{1,j}^{n+1/2} - p_{0,j}^{n+1/2}}{\Delta r_1} - \frac{q_0^w}{2\pi}) - \frac{f_{0,j}^n}{2}.$$

Полученную систему уравнений запишем в виде

$$a_{i,j}p_{i-1,j}^{n+1/2} - c_{i,j}p_{i,j}^{n+1/2} + b_{i,j}p_{i+1,j}^{n+1/2} = -d_{i,j},$$

$$1 \le i \le N_r - 1 \tag{24}$$

$$p_{0,j}^{n+1/2} = \chi_j p_{1,j}^{n+1/2} + \nu_j, \tag{25}$$

$$p_{0,j}^{n+1/2} = p_w^{n+1/2}. \tag{26}$$

Заметим, что система линейных алгебраических уравнений (24)-(26) имеет трехдиагональную матрицу, следовательно, если каким-то образом будет определено $p_{N_r,j}^{n+1/2}$, то решение данной системы можно найти устойчивым методом прогонки [4]. Поэтому условие (26) используем для опре-

деления граничного значения $p_{N_r,j}^{n+1/2}$. Решение системы (24), (25) представим в виде

$$p_{i,j}^{n+1/2} = \xi_{i+1,j} p_{i+1,j}^{n+1/2} + \eta_{i+1,j},$$
$$i = 0,1,2,...,N_r - 1, \qquad (27)$$

где $\xi_{i+1,j}, \eta_{i+1,j}$ - неизвестные пока коэффициенты. Записывая аналогичное выражение для $p_{i-1,j}^{n+1/2}$, найдем

$$p_{i-1,j}^{n+1/2} = \xi_{i,j}\xi_{i+1,j} p_{i+1,j}^{n+1/2} + \xi_{i,j}\eta_{i+1,j} + \eta_{i,j}.$$

Подставляя полученные выражения для $p_{i,j}^{n+1/2}, p_{i-1,j}^{n+1/2}$ в уравнение (24), получим следующие формулы для определения коэффициентов $\xi_{i+1,j}, \eta_{i+1,j}$

$$\xi_{i+1,j} = b_{i,j} / (c_{i,j} - \xi_{i,j} a_{i,j}),$$
$$\eta_{i+1,j} = (a_{i,j}\eta_{i,j} + d_{i,j}) / (c_{i,j} - \xi_{i,j} a_{i,j}),$$
$$i = 1,2, ..., N_r - 1.$$

А начальные значения этих коэффициентов находим из требования эквивалентности условия (25) при $i = 0$ уравнению (27)

$$\xi_{1,j} = \chi_j, \quad \eta_{1,j} = \nu_j.$$

После того, как коэффициенты $\xi_{i,j}, \eta_{i,j}$ найдены для всех $i = 1, N_r$ можно определить граничное значение $p_{N_r,j}^{n+1/2}$. Для этого достаточно записать зависимость между $p_{0,j}^{n+1/2}$ и $p_{N_r,j}^{n+1/2}$ в явном виде. Запишем уравнение (27) при $i = 0$

$$p_{0,j}^{n+1/2} = \xi_{1,j} p_{1,j}^{n+1/2} + \eta_{1,j}.$$

Теперь подставив сюда выражение $p_{1,j}^{n+1/2} = \xi_{2,j} p_{2,j}^{n+1/2} + \eta_{2,j}$, будем иметь

$$p_{0,j}^{n+1/2} = \xi_{1,j}(\xi_{2,j} p_{2,j}^{n+1/2} + \eta_{2,j}) + \eta_{1,j}.$$

Далее, подставляя в последнее уравнение выражения для $p_{2,j}^{n+1/2}, p_{3,j}^{n+1/2}, ..., p_{N_r-1,j}^{n+1/2}$, получим формулу, в которой $p_{0,j}^{n+1/2}$ выражается через $p_{N_r,j}^{n+1/2}$,

$$p_{0,j}^{n+1/2} = p_{N_r,j}^{n+1/2} \prod_{i=1}^{N_r} \xi_{i,j} + \sum_{i=2}^{N_r} \eta_{i,j} \prod_{m=1}^{i-1} \xi_{m,j} + \eta_{1,j}.$$

Отсюда можно найти граничное значение $p_{N_r,j}^{n+1/2}$

$$p_{N_r,j}^{n+1/2} = \frac{p_{0_r,j}^{n+1/2} - \sum_{i=2}^{N_r} \eta_{i,j} \prod_{m=1}^{i-1} \xi_{m,j} - \eta_{1,j}}{\prod_{i=1}^{N_r} \xi_{i,j}}.$$

Определив $p_{N_r,j}^{n+1/2}$, решение системы (24) - (26) можно найти по рекуррентной формуле (27), начиная с $i = N_r - 1$. Таким образом, определив решение одномерной обратной задачи (12)-(14) при $t = t_{n+1/2}$ можно перейти к решению задач (15)-(23). Отметим, что решение задачи (15)-(17) конечно разностным методом приведено в [5]. А для численного решения задач (18),(19) и (20),(21) можно использовать явную конечно-разностную схему с определением фазовых проницаемостей «вверх по потоку».

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (проект № EIF-2010-1(1)-40/11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Азиз Х., Сэттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982.
2. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. Введение в теорию обратных задач теплообмена. М.: Машиностроение, 1979.
3. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент- Клэр Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989.
5. Kh. M.Hamzayev, K.Shirinov. Numerical method of the decision of the bidimentional equation of filtration in polar coordinates. PCI 2006, Baku, The International conference " Problems of cybernetics and informatic ", Vol.1, pp.101-104.