УДК 551.466

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Талипова Т.Г.[1], Пелиновский Е.Н.[1-3], Куркина О.Е.[2,3], Диденкулова И.И.[2,4], Родин А.А.[2,4], Панкратов А.С.[2], Наумов А.А.[2], Гиниятуллин А.Р.[2], Николкина И.Ф.[4]

[1]*Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород, Россия*
[2]*Нижегородский государственный технический университет, Н. Новгород, Россия*
[3]*Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики, Н. Новгород, Россия*
[4]*Институт Кибернетики, Таллиннский технический университет, Таллинн, Эстония*

Представленные результаты поисковой научно-исследовательской работы получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы, а также при поддержке грантов МК1440.2012.5, РФФИ 12-05-00472, SF0140007s11, ETF8870 и программы Mobilitas ESF (EMJD270).

АННОТАЦИЯ

Приведена физико-математическая модель трансформации двумерных нелинейных внутренних волн в природных стратифицированных водоемах. Модель основана на уравнении Кортевега-де Вриза и его обобщениях. Коэффициенты этого уравнения вычисляются по известным вертикальным распределениям плотности жидкости с помощью решения задачи Штурма-Лиувилля на собственные значения. Модель учитывает горизонтальную изменчивость гидрологических полей по горизонтали и переменность глубины водоема. В качестве примера рассмотрена трансформация уединенной волны (солитона) в двухслойном потоке с уменьшающейся глубиной. Показано, что солитон разрушается в двух критических точках. Одна из них связана с переходом двухслойного потока в однослойный, а вторая – когда толщины слоев сравниваются между собой. Рассчитано изменение амплитуды уединенной волны от толщины нижнего слоя.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные внутренние волны являются неотъемлемой частью волновых движений в стратифицированных средах, и они часто наблюдаются в океанах и морях. Эти волны могут достигать очень больших амплитуд ввиду малой разницы в плотностях соседних слоев, так что архимедовы силы, действующие на частицу жидкости, достаточно малы, чтобы воспрепятствовать передвижению частиц по вертикали. Общие сведения о внутренних волнах в океанах и морях можно найти в книгах (Морозов, 1985; Коняев и Сабинин, 1992; Hutter, 2012). Теоретические модели описания нелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости основаны на уравнениях Эйлера (если вязкостью жидкости пренебрегается) или уравнениях Навье-Стокса с различными аппроксимациями на диссипацию волновой энергии и эти модели описаны, например, в книгах (Миропольский, 1981; Vlasenko et al., 2005). Особо необходимо отметить, что в реальных природных водоемах вертикальная стратификация плотности воды не является фиксированной и меняется в пространстве. В настоящее время имеются достаточно подробные гидрологические атласы, позволяющие количественно оценивать характеристики вертикальной и горизонтальной изменчивости поля плотности (Boyer et al., 2006).

В течение последних двадцати лет в Институте прикладной физики РАН и в Нижегородском государственном техническом университете развивается физико-математическая модель описания трансформации нелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости с учетом распределения поля плотности в пространстве и переменности глубины жидкости (Пелиновский и др., 1977, 1994; Holloway et al., 1997, 1999; Талипова и др., 1999; Pelinovsky et al., 2007). Она основана

на обобщенном уравнении Кортевега -де Вриза, являющимся в настоящее время эталонным уравнением нелинейной математической физики для описания нелинейных волновых процессов в слабодиспергирующих средах. Наиболее важными особенностями развитой модели является ее применимость к реальным гидрологическим полям без использования приближения многослойности вод океана или непрерывности вертикального профиля плотности воды. Эта модель сейчас реализована в виде вычислительного комплекса, позволяющего автоматизировать вычисления (Тюгин и др., 2011).

В настоящей работе с помощью данной модели изучается трансформация внутренней волны конечной амплитуды в двухслойном потоке переменной глубины.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОСНОВАННАЯ НА ОБОБЩЕННОМ УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА

Наиболее строго, обобщенное (иногда говорят расширенное) уравнение Кортевега – де Вриза с использованием асимптотической процедуры выведено в работе (Пелиновский и др., 2000; Grimshaw et al., 2002). Здесь мы приведем основные уравнения модели в приближении Буссинеска (когда изменения плотности по вертикали достаточно малы – типичное приближение для природных водоемов) в пренебрежении вязкими процессами, а также не будем учитывать фоновые течения. В частности, если нет изменения характеристик среды по горизонтали, основным уравнением для двумерного волнового потока в стратифицированной жидкости является 1+1 уравнение Гарднера или уравнение Кортевега-де Вриза со смешанной (квадратично-кубической) нелинейностью

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\alpha\eta + \alpha_1\eta^2)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \qquad (1)$$

где η(x,t) – волновая функция, входящая в вертикальное смещение изопикн (поверхности равной плотности ζ(x,y,t)).

$$\zeta(x,y,t) = \eta(x,t)\Phi(y) \ . \qquad (2)$$

Здесь x – горизонтальная и y – вертикальная координаты, t – время, Φ(y) – модовая функция, являющаяся решением задачи Штурма-Лиувилля с нулевыми граничными условиями на собственные значения

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{N^2(y)}{c^2})\Phi = 0, \ \ \Phi(0) = \Phi(-H) = 0, \qquad (3)$$

где H – глубина слоя воды (отсюда видно, что начало координат связывается с водной поверхностью), N(y) – частота Вяйсяля-Брента (плавучести), определяемая через вертикальное распределение плотности жидкости $\rho_0(y)$

$$N(y) = \sqrt{-\frac{gd\rho_0}{\rho_0 dy}}, \qquad (4)$$

g – ускорение силы тяжести и c – собственное значение задачи Штурма – Лиувилля. Легко показать, что краевая задача (3) имеет дискретный спектр различающихся собственных значений (Миропольский, 1981), на чем мы не останавливаемся. В рамках данной модели каждая мода внутренних волн распространяется независимо, так что мы не будем использовать индекс для выбора определенной моды. Напомним, что собственное значение c определяет физически скорость распространения длинных внутренних волн малой амплитуды. Фактически, уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся со скоростью c, так что координата x есть x – ct. Отметим также, что мы используем условие нормировки на функцию Φ(y): Φmax = 1, так что функция η(x,t) описывает вертикальное смещение изопикны в максимуме моды.

Коэффициенты уравнения (1) называются соответственно коэффициентами квадратичной и кубической нелинейности и дисперсии; они определяются через вертикальное распределение плотности воды

$$\alpha = \left(\frac{3c}{2}\right)\frac{\int_{-H}^{0}(d\Phi/dy)^3 dy}{\int_{-H}^{0}((d\Phi/dy)^2 dy} \qquad (5)$$

$$\alpha_1 = \frac{3c}{2}\frac{\int\left[3(dT/dy) - 2(d\Phi/dy)^2\right](d\Phi/dy)^2 dy}{\int(d\Phi/dy)^2 dy} - \qquad (6)$$

$$-\frac{3c}{2}\frac{\int\left\{\alpha^2(d\Phi/dy)^2 - \alpha\left[5(d\Phi/dy)^2 - 4dT/dy\right]d\Phi/dy\right\}dy}{\int(d\Phi/dy)^2 dy}$$

© Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Куркина О.Е., Диденкулова И.И., Родин А.А., Панкратов А.С., Наумов А.А., Гиниятуллин А.Р., Николкина И.Ф.

$$\beta = \left(\frac{c}{2}\right)\frac{\int_{-H}^{0}{}^{2}\Phi^2 dy}{\int_{-H}^{0}(d\Phi/dy)^2 dy}. \quad (7)$$

Здесь функция T есть нелинейная поправка к модальной функции Ф, определяемая уравнением

$$\frac{d^2T}{dy^2}+\frac{N^2(y)}{c^2}T=-\frac{\alpha}{c}\frac{d^2\Phi}{dy^2}+\frac{3}{2}\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2\right]. \quad (8)$$

Уравнения модели достаточно громоздки, однако вычисление всех коэффициентов по реально заданному распределению плотности воды в настоящее время не представляет трудностей, и оно автоматизировано, например, в вычислительном комплексе (Тюгин и др., 2011).

На практике, как уже говорилось, необходимо учитывать переменность глубины бассейна, а также изменчивость плотности по горизонтали. Если изменения по трассе достаточно плавные, так что можно пренебречь отражением волновой энергии, то аналогично (1) можно вывести уравнение Гарднера с переменными коэффициентами (Holloway et al., 1997, 1999)

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\left(\frac{\alpha(x)Q(x)}{c^2(x)}\xi+\frac{\alpha_1(x)Q^2(x)}{c^2(x)}\xi^2\right)\frac{\partial\xi}{\partial s}+\frac{\beta(x)}{c^4(x)}\frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}=0, \quad (9)$$

где

$$\eta(s,x)=Q(x)\xi(s,x), \quad (10)$$

$$Q(x)=\sqrt{\frac{(Mc^3)_0}{Mc^3}},\ M(x)=\int_{-H(x)}^{0}\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 dy. \quad (11)$$

$$s(x,t)=\int\frac{dx}{c(x)}-t. \quad (12)$$

Здесь индекс 0 в Q(x) соответствует начальному значению параметров.

Таким образом, разработанная модель позволяет учесть реальное распределение плотности воды по вертикали и горизонтали, а также переменность глубины бассейна. При этом задача Штурма-Лиувилля (3) должна решаться в каждой точке по трассе распространения, в результате все коэффициенты уравнения Гарднера становятся переменными по горизонтали. Именно поэтому уравнение (9) и называется уравнением Гарднера с переменными коэффициентами. Наконец важно отметить, что уравнение (9) имеет два закона сохранения потоков массы и энергии

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(s,x)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(t,x)dt, \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2(s,x)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2(t,x)dt, \quad (14)$$

которые могут быть использованы для контроля вычислений.

В данной работе будут исследованы волны в двухслойном потоке. В этом случае все коэффициенты вычисляются явно (Kakutani and Yamasaki, 1978)

$$c=\sqrt{\frac{g\Delta\rho}{\rho}\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}}, \quad (15)$$

$$\alpha=\frac{3c}{2}\frac{h_1-h_2}{h_1h_2}, \quad (16)$$

$$\alpha_1=-\frac{3c}{8h_1^2h_2^2}(h_1^2+h_2^2+6h_1h_2), \quad (17)$$

$$\beta=\frac{ch_1h_2}{6}, \quad (18)$$

где h_1 – толщина верхнего слоя, $h_2(x)$ – переменная толщина нижнего слоя, $\Delta\rho/\rho$ - скачок плотности на границе раздела слоев. Как видим, все коэффициенты знакоопределенные, за исключением коэффициента квадратичной нелинейности, который положителен, если граница раздела слоев находится ближе ко дну, и отрицателен в противоположном случае. Аналогично вычисляется коэффициент усиления

$$Q(x)=\sqrt{\frac{c_0^3}{c^3(x)}\frac{h_1^{-1}+h_2^{-1}(0)}{h_1^{-1}+h_2^{-1}(x)}}. \quad (19)$$

УЕДИНЕННЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ (СОЛИТОНЫ)

Уравнение Гарднера (1) имеет стационарные решения в виде уединенных волн (солитонов)

$$\eta(x,t)=\frac{A}{1+B\mathrm{ch}(\gamma(x-Vt)),}, \quad (20)$$

$$A = \frac{6\beta\gamma^2}{\alpha},\ B^2 = 1 + \frac{6\alpha_1\beta\gamma^2}{\alpha^2},\ V = \beta\gamma^2, \qquad (21)$$

где γ есть произвольный параметр, характеризующий обратную ширину солитона. Другим свободным параметром является фаза солитона (его местоположение), которую мы здесь не рассматриваем. Амплитуда волны, или экстремум функции (20), равна

$$a = \frac{A}{1+B}. \qquad (22)$$

Солитон Кортевега – де Вриза. В случае, когда кубическая нелинейность отсутствует ($\alpha_1 = 0$), решение (21) переходит в солитон Кортевега – де Вриза

$$\eta(x,t) = a\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\alpha a}{12\beta}}\left(x - \frac{\alpha a}{3}t\right)\right]. \qquad (23)$$

Важно подчеркнуть, что полярность солитона определяется знаком коэффициента квадратичной нелинейности. Таким образом, если граница раздела находится ближе ко дну, чем к поверхности, то солитон представляет собой гребень. В противоположном случае солитон представляет собой впадину. В этом принципиальное отличие внутренних волн от поверхностных волн в однородной жидкости, когда солитон имеет только положительную полярность. Приведем также значения массы солитона

$$M_s = \int_{-\infty}^{+\infty}\eta dx = \sqrt{\frac{48\beta a}{\alpha}}\,\mathrm{sign}(\alpha), \qquad (24)$$

и его энергии

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta^2}{2}dx = \sqrt{\frac{16\beta a^3}{3\alpha}}. \qquad (25)$$

Масса и энергия солитона уравнения Кортевега– де Вриза являются монотонными функциями его амплитуды.

Солитон Гарднера. Поскольку для волн в двухслойном потоке $\alpha_1 < 0$, то $0 < B < 1$. В результате, существует только одно семейство солитонов, полярность которых по прежнему определяется знаком коэффициента квадратичной нелинейности. Форма солитона для $\alpha = 1$ и $\alpha_1 = -1$ показана на рис.1. Для малых амплитуд ($B \to 1$), солитон (21) трансформируется в солитон Кортевега – де Вриза (23). Возрастая, амплитуда волны приближается к максимальной величине

$$a_{cr} = \frac{\alpha}{|\alpha_1|}. \qquad (26)$$

В этом пределе ($B \to 0$), ширина солитона стремится до бесконечности, и солитон становится так называемым «толстым» или «столообразным» солитоном. Приведем здесь также значения массы и энергии солитона уравнения Гарднера

$$M_s = 4\sqrt{\frac{6\beta}{|\alpha_1|}}\,\mathrm{arcth}\left(\sqrt{\frac{1-B}{1+B}}\right), \qquad (27)$$

$$E_s = \frac{\alpha\sqrt{6\beta|\alpha_1|}}{\alpha_1^2}\left\{2\,\mathrm{arcth}\left(\sqrt{\frac{1-B}{1+B}}\right) - \sqrt{1-B^2}\right\}. \qquad (28)$$

Масса и энергия этого солитона возрастают с увеличением его амплитуды и в пределе толстого солитона стремятся к бесконечности пропорционально его ширине.

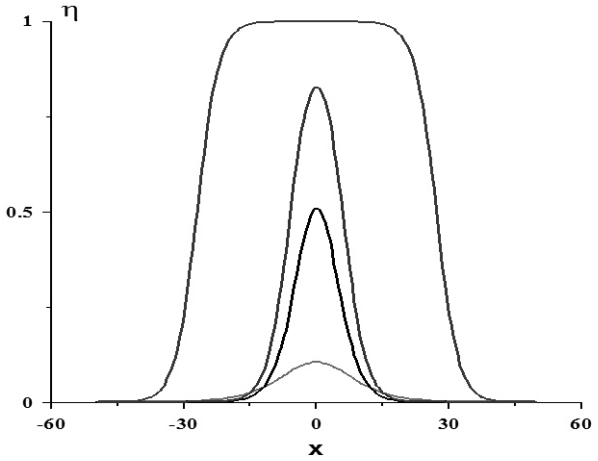

Рис.1 Солитоны уравнения Гарднера в двухслойном потоке.

АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ СОЛИТОНА ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ПОТОКЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Если глубина потока меняется очень медленно, то волна локально является стационарной и описывается решениями, приведенными в выше. Изменения параметров солитона можно найти, используя асимптотическое решение уравнения Гарднера с переменны-

© Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Куркина О.Е., Диденкулова И.И., Родин А.А., Панкратов А.С., Наумов А.А., Гиниятуллин А.Р., Николкина И.Ф.

ми коэффициентами (9). Легко показать, что амплитуда солитона находится из сохранения второго (энергетического) интеграла (14), означающего сохранение потока энергии. В виду ограниченности солитона в пространстве и отсутствия отражения волны от откоса, очевидно, что второй интеграл сводится к сохранению энергии солитона в пространстве. Поэтому мы можем работать сразу с энергетическими характеристиками солитона в соответствие с формулами (25) и (28). Рассмотрим здесь трансформацию солитона малой амплитуды в рамках уравнения Кортевега – де Вриза. Учитывая выражения для коэффициентов уравнения Кортевега – де Вриза (16) и (18) из интеграла (25) находим искомую формулу для амплитуды солитона

$$\frac{a(x)}{a_0} = \left[\frac{h_{20}}{h_2(x)}\right]^{2/3}\left[\frac{h_1 - h_2(x)}{h_1 - h_{20}}\right]^{1/3}. \qquad (29)$$

где a_0 – амплитуда солитона в точке с глубиной h_{20}. Пусть, например, солитон движется в жидкости с монотонно убывающей глубиной, при этом начальная толщина нижнего слоя превышает толщину верхнего слоя. В этом случае солитон имеет отрицательную полярность (впадина). Он существует до тех пор, пока толщины слоев не сравниваются, и в критической точке обращается в нуль, как и коэффициент квадратичной нелинейности. Характер изменения амплитуды солитона зависит от величины параметра $q = h_1/h_{20} < 1$. Исследуя на экстремум функцию (29), легко найти глубину, когда амплитуда солитона достигает максимума

$$h_2^* = 2h_1. \qquad (30)$$

Величина максимального усиления солитона есть

$$\frac{a_*}{a_0} = \left(\frac{h_{20}}{2h_1}\right)^{2/3}\left(\frac{h_1}{h_{20} - h_1}\right)^{1/3}. \qquad (31)$$

Итак, если $h_{20} < 2\cdot h_1$ ($q > 0.5$), то амплитуда солитона только затухает при приближении к критической точке. Если же начальная толщина нижнего слоя достаточно большая, то амплитуда солитона сначала возрастает, достигая экстремального значения (31), а затем убывает до нуля. На рис.2 приведена зависимость максимального коэффициента усиления от параметра q. Усиление возрастает, если глубина нижнего слоя существенно превышает глубины верхнего слоя.

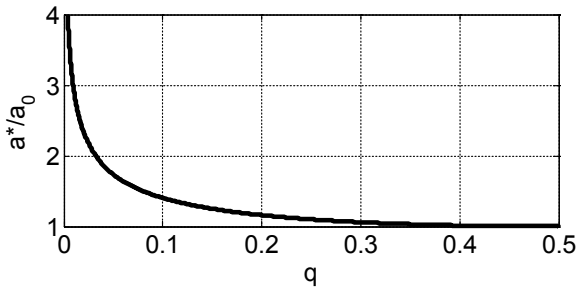

Рис.2 Зависимость максимального коэффициента усиления от параметра q.

На рис.3 приведена зависимость амплитуды внутренней волны в двухслойном потоке от глубины нижнего слоя, построенная по формуле (29).

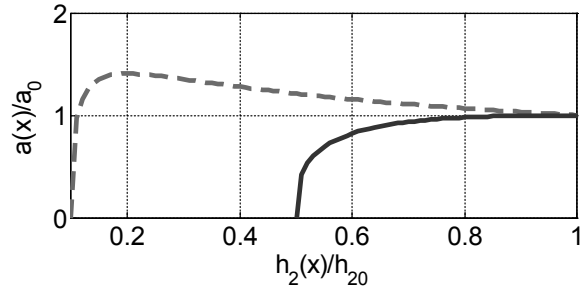

Рис.3 Изменение амплитуды внутренней волны в двухслойном потоке переменной глубины с узким верхним слоем (штриховой линией отмечен случай $h_1/h_{20} = 0.1$, а сплошной $h_1/h_{20} = 0.5$).

В критической точке в рамках асимптотического подхода амплитуда солитона обращается в нуль. На самом деле, при этом длина солитона резко возрастает, и нарушается условие медленности изменения параметров солитона. Поведение солитона в критической точке (без относительно к данной задаче) было исследовано в работах (Knickerbocker and Newell, 1980; Талипова и др., 1997). Солитон не разрушается полностью, и из него в дальнейшем рождается солитон противоположной полярности (гребень).

В случае же, если начальная толщина нижнего слоя меньше толщины верхнего слоя, то солитон изначально имеет положительную полярность (гребень) и по мере уменьшения глубины амплитуда солитона только возрастает (рис.4). На последней стадии, когда $h_2 \to 0$, амплитуда солитона растет как $h_2^{-2/3}$

$$\frac{a(x)}{a_0} \approx \left[\frac{h_{20}}{h_2(x)}\right]^{2/3}\left[\frac{h_1}{h_1 - h_{20}}\right]^{1/3}. \qquad (32)$$

Уже из этой формулы видна слабая зависимость амплитуды солитона от отношения h_{20}/h_1, которая и заметна на рис.4. Отметим также отличие в законах изменения амплитуд внутреннего и поверхностного солитона, для поверхностных волн $a \sim h^{-1}$ (Пелиновский, 1996).

В точке, когда $h_2 = 0$, двухслойный поток трансформируется в однослойный, и внутренние волны при этом невозможны. Физически это связано с разрушением солитона в переходной зоне (по аналогии с поверхностными волнами такую зону можно назвать зоной наката внутренних волн), где его амплитуда резко возрастает. Этот процесс необходимо исследовать в рамках более полных по нелинейности уравнений. Если амплитуда волны достаточно мала, то обрушение в зоне наката может и не происходить, и внутренняя волна отражается от откоса (Талипова и Пелиновский, 2011).

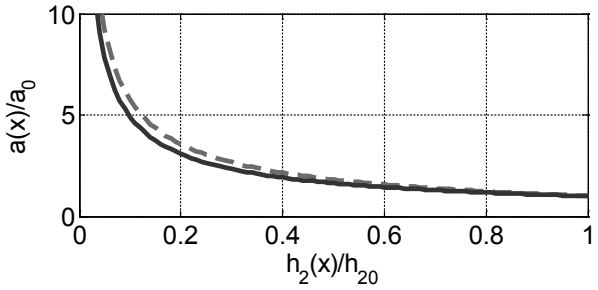

Рис.4 Изменение амплитуды внутренней волны в двухслойном потоке переменной глубины с малой толщиной нижнего слоя (штриховой линией отмечен случай $h_1/h_{20} = 2$, а сплошной $h_1/h_{20} = 6$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная ранее физико-математическая модель трансформации внутренних волн конечной амплитуды в стратифицированной жидкости применена для анализа уединенной волны малой амплитуды (солитона) в двухслойном потоке с уменьшающейся глубиной. Показано существование двух критических точек, в которых солитон разрушается. Первая из них возникает, когда толщины слоев сравниваются между собой, и коэффициент квадратичной нелинейности обращается в нуль. В этой точке солитон отрицательной полярности исчезает, и в дальнейшем возникает солитон положительной полярности. Другая критическая точка соответствует превращению двухслойного потока в однослойный. В таком потоке внутренние волны не могут существовать, и волны разрушаются при подходе к этой точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов Е.Г. Океанские внутренние волны. – М.: Наука, 1985. – 151 С.
2. Коняев К.В., Сабинин К.Д. Волны внутри океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1992. – 272 С.
3. Hutter K. Nonlinear internal waves in lakes. – Springer, 2012. – 294 P.
4. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 302 С.
5. Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K. Baroclinic tides: Theoretical modeling and observational evidence. – Cambridge University Press, 2005. – 372 P.
6. Boyer T.P., Antonov J.I., Garcia H.E. et al. World Ocean Database 2005 // Ed. S.Levitus. NOAA Atlas NESDIS 60. – U.S. Government Printing Office. Wash. D.C., 2006. – 190 P.
7. Пелиновский Е.Н., Шаврацкий С.Х., Раевский М.А. Уравнение Кортевега–де Вриза для нестационарных внутренних волн в неоднородном океане // Изв. АН СССР ФАО. –1977.–Т.13.–№ 3.–С.325–328.
8. Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г., Степанянц Ю.А. Моделирование распространения нелинейных внутренних волн в горизонтально неоднородном океане // Изв. РАН ФАО. – 1994. – Т. 30. – № 1. – С. 79 – 85.

© Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Куркина О.Е., Диденкулова И.И., Родин А.А., Панкратов А.С., Наумов А.А., Гиниятуллин А.Р., Николкина И.Ф.

9. Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T., Barnes B. A Nonlinear Model of Internal Tide Transformation on the Australian North West Shelf // Physical Oceanography. – 1997. – Vol. 27. – N 6. – P. 871 – 896.
10. Holloway P, Pelinovsky E., Talipova T. A Generalized Korteweg–de Vries Model of Internal Tide Transformation in the Coastal Zone // Geophys. Res. – 1999. – Vol. 104 (C8). – P. 18333 – 18350.
11. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н. Ламб К., Гимшоу Р., Холловэй П. Эффекты кубической нелинейности при распространении интенсивных внутренних волн. // ДАН. – 1999. – Т. 364. - № 6. – С. 824 – 827.
12. Pelinovsky E., Polukhina O., Slunyaev A., Talipova T. Internal solitary waves // Ch. 4. Solitary Waves in Fluids. WIT Press. Southampton. Boston, 2007. – P. 85 – 110.
13. Тюгин Д.Ю., Куркина О.Е., Куркин А.А. Программный комплекс для численного моделирования внутренних гравитационных волн в мировом океане // Фундаментальная и прикладная гидрофизика, 2011. –Т. 4. – № 2. – С. 32–44.
14. Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е., Лэмб К. Нелинейные внутренние волны в океане, стратифицированном по плотности и течению // Океанология, 2000. – Т. 40. – № 6. – С. 805 – 815.
15. Grimshaw R., Pelinovsky E., Poloukhina O. Higher-order Korteweg-de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface // Nonlinear Processes in Geophysics, 2002. – Vol. 9. – P. 221 – 235.
16. Kakutani T. and Yamasaki N. Solitary waves on a two-layer fluid // J. Phys. Soc. Japan, 1978. – Vol. 45. – P. 674 – 679
17. Knickerbocker C., Newell A. Internal solitary waves near a turning point // Phys. Lett., 1980. – 75A. – P. 326 – 330.
18. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Гримшоу Р. Трансформация солитона через точку нулевой нелинейности // Письма в ЖЭТФ, 1997.– Т. 65. – С.120–125.
19. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. – 275 С.
20. Талипова Т.Г. и Пелиновский Е.Н. Трансформация внутренних волн над неровным дном: аналитические результаты. // Океанология. – 2011. – Т. 51. – № 4. – С. 621 – 626.