**УДК 621.22.01+517.958:532.5+532.5+532.59**

# РАЗВИТИЕ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЙ В ГИДРОТУРБИНАХ

**Куйбин П.А.[1], Пылев И.М.[2], Захаров А.В.[2]**

[1]*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2]*Филиал ОАО "Силовые машины" – ЛМЗ, Санкт-Петербург, Россия*

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Исследования и разработки ...", ГК 11.519.11.6022; ФЦП "Кадры", ГК 16.740.11.0063; РФФИ, грант № 10-08-01096; Программы ведущих научных школ, грант НШ-6686.2012.8

## АННОТАЦИЯ

При работе гидротурбин в неоптимальных режимах могут возникать сильные пульсации давления и вибрации. Один из механизмов возникновения неустойчивости обусловлен наличием кавитационной полости за рабочим колесом. В работе Chen et al. [1] явление моделируется с использованием понятия кавитационной податливости. В результате продемонстрирован дестабилизирующий эффект диффузора и закрутки.

В настоящей работе выявлено влияние характера распределения завихренности и размера кавитационной полости за рабочим колесом гидротурбины на коэффициенты характеристического уравнения, решение которого дает собственные частоты и инкременты колебаний. Показано, что влияние закрутки на устойчивость значительно меньше, чем описывалось в [1] и быстро уменьшается с ростом размера кавитационной полости.

## ВВЕДЕНИЕ

Нестационарные явления в проточной части гидротурбины являются одной из основных и актуальных проблем разработки, создания и эксплуатации гидроэнергоблоков. Описание этих явлений осложняется из-за возможности возникновения кавитационных каверн и вовлечения воздуха в поток воды.

Значительный прогресс при моделировании неустойчивости, обусловленной наличием кавитационной/воздушной полости за рабочим колесом гидротурбины, достигнут в работе Chen et al. [1]. Авторы использовали понятие кавитационной податливости и выявили дестабилизирующий эффект диффузора и закрутки. Те же авторы [2], принимая во внимание конечность скорости звука в напорном водоводе, обнаружили появлений высокочастотных неустойчивостей. Из работ [1, 2] следует вывод, что изменяя объем полости, параметры диффузора и величину закрутки можно управлять устойчивостью течения и собственными частотами. В то же время, экспериментальные исследования [3] очевидно демонстрируют влияние газовой фазы на пульсационные характеристики в вихревой камере с прецессирующим вихрем. При переходе от чистой жидкости к двухфазному течению частота прецессии резко уменьшается. С дальнейшим увеличением подачи газа частота монотонно растет. На основе модели винтового вихря [4, 5], где выведены аналитические формулы для частоты прецессии и амплитуды пульсаций давления, а также анализа экспериментальных данных [3] построена полуэмпирическая модель для описания зависимости частоты и амплитуды пульсаций давления от газосодержания [6].

Следует заметить, что при моделировании неустойчивости авторы работ [1, 2] некорректно трактуют уравнение Бернулли и не учитывают влияние кавитационной полости на распределение давления за рабочим колесом гидротурбины.

Целью данной работы является развитие моделей вихревого течения жидкости с учетом кавитации воздуха и оценка влияния паровой фазы и закрутки на развитие неустойчивости в отсасывающей трубе гидротурбины.

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим систему, состоящую из напорного канала длиной $L_i$ и площадью сечения $A_i$, рабочего колеса (РК) турбины и отсасывающей трубы (ОТ) с площадью входного и выходного сечений $A_c$ и $A_e$, соответственно (см. рис.1). Предполагаем, что за турбиной – на входе в ОТ образуется полость объемом $V_c$. В работе Chen et al. [1] выведены уравнение неразрывности (связь между расходом в напорном водоводе $Q_1$ и расходом в ОТ $Q_2$)

$$Q_2 - Q_1 = \frac{dV_c}{dt} = -\rho C \frac{L_e}{A_e}\frac{d^2Q_2}{dt^2} + \rho C \frac{D-\zeta_2}{A_e^2} Q_2 \frac{dQ_2}{dt} + 2\rho C\alpha \frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{S}\left(\frac{Q_1}{S}\operatorname{ctg}\beta_2 - U_2\right)\frac{dQ_1}{dt} \quad (1)$$

и уравнение, связывающее давление на входе в систему с давлением на выходе

$$p_{\text{inlet}} = p_{\text{exit}} + \rho\frac{L_e}{A_e}\frac{dQ_2}{dt} + \rho\frac{\zeta_2 - D}{2A_e^2}Q_2^2 + \rho\frac{L_i}{A_i}\frac{dQ_1}{dt} + \rho\frac{\zeta_T}{2A_i^2}Q_1^2 \quad (2)$$

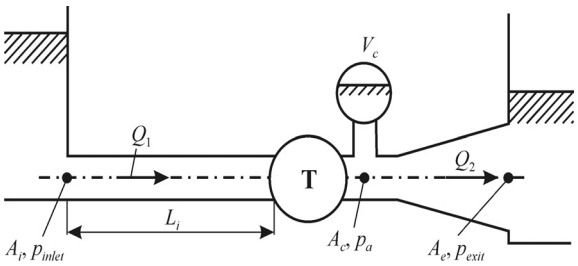


Рис.1 Схема проточного тракта гидротурбины.

Здесь введены обозначения: ρ – плотность жидкости; $C = -\partial V_c/\partial p_c$ – кавитационная податливость; $L_e = \int(A_e/A(s))ds$ – эффективная длина ОТ, Ae – площадь выходного сечения ОТ, $D = (A_e/A_c)^2 - 1$ – диффузорный фактор, $A_c$ – площадь входного сечения ОТ, $\zeta_2$ – коэффициент потерь ОТ. $\zeta_2$ полагается постоянным, хотя, строго говоря, он может зависеть от степени закрутки потока в ОТ [7]. При фиксированных скорости вращения РК и открытии направляющего аппарата турбина рассмотрена как сопротивление с постоянным коэффициентом потерь $\zeta_T$, который зависит от открытия направляющего аппарата. Последний член уравнения (1) содержит коэффициент α – коэффициент давления, отвечающий за эффект закрутки. Его определение будет рассмотрено в следующем разделе. Через $\beta_2$ обозначен угол наклона лопасти на выходе из РК, S – площадь выходного сечения РК, $U_2$ – периферийная скорость на выходе из РК. При этом характерная окружная скорость потока на выходе из РК имеет величину

$c_{\theta 2} = (Q_1/S)\operatorname{ctg}\beta_2 - U_2$

Второй член в правой части уравнения (1), пропорциональный $dQ_2/dt$, описывает влияние диффузора на величину коэффициента расхода. При росте расхода $Q_2$ окружающее давление $p_a$ понижается в том случае, если фактор диффузорности D больше, чем потери $\zeta_2$. При этом объем полости возрастает. Второй член в левой части, пропорциональный $dQ_1/dt$, представляет собой эффект закрутки. Этот член также может быть назван «коэффициентом расхода», но этот член связан с расходом $Q_1$ перед полостью. При расходах $Q_1$ выше, чем $U_2S \operatorname{tg}\beta_2$, тангенциальная скорость $c_{\theta 2}$ и объем полости растут с увеличением $Q_1$. Противоположный результат имеет место при меньших расходах.

Заметим, что левая и правая части уравнения (2) совпадают с давлением за рабочим колесом ра.

Уравнения (1), (2) являются основными уравнениями для определения $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$. С целью анализа устойчивости представим $Q_1 = \overline{Q}_1 + \tilde{Q}_1(t)$, $Q_2 = \overline{Q}_2 + \tilde{Q}_2(t)$ и предположим, что $\overline{Q}_1 > \left|\tilde{Q}_1(t)\right|$, $\overline{Q}_2 > \left|\tilde{Q}_2(t)\right|$. Полагая далее, что $\overline{Q}_1 = \overline{Q}_2 = \overline{Q}$, нестационарные части уравнений (1), (2) могут быть выражены как

$$0 = \rho\frac{L_e}{A_e}\frac{d\tilde{Q}_2}{dt} + \rho\frac{\zeta_2 - D}{A_e^2}\overline{Q}\tilde{Q}_2 + \rho\frac{L_i}{A_i}\frac{d\tilde{Q}_1}{dt} + \rho\frac{\zeta_T}{A_i^2}\overline{Q}\tilde{Q}_1 \quad (3)$$

$$\tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_1 = -\rho C\frac{L_e}{A_e}\frac{d^2\tilde{Q}_2}{dt^2} + \rho C\frac{D-\zeta_2}{A_e^2}\overline{Q}\frac{d\tilde{Q}_2}{dt} + 2\rho C\alpha\frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{S}\left(\frac{\overline{Q}}{S}\operatorname{ctg}\beta_2 - U_2\right)\frac{d\tilde{Q}_1}{dt} \quad (4)$$

Далее представляем нестационарные функции $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ в виде $\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_{1,0}e^{i\omega t}$, $\tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_{2,0}e^{i\omega t}$, где i – мнимая единица. Подставляя эти выражения

$$-\left(\frac{\rho L_i}{A_i}\frac{\rho L_e}{A_e}C\right)(i\omega)^3-\left[\frac{\rho\zeta_T}{A_i^2}\overline{Q}\frac{\rho L_e C}{A_e}-\frac{\rho L_i}{A_i}\frac{\rho C}{A_e^2}(D-\zeta_2)\overline{Q}+2\rho C\alpha\frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{S}\left(\frac{\overline{Q}}{S}\operatorname{ctg}\beta_2-U_2\right)\frac{\rho L_e}{A_e}\right](i\omega)^2$$
$$+\left[-\frac{\rho L_e}{A_e}-\frac{\rho L_i}{A_i}+\frac{\rho\zeta_T}{A_i^2}\frac{\rho C}{A_e^2}(D-\zeta_2)\overline{Q}^2+2\rho C\alpha\frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{S}\left(\frac{\overline{Q}}{S}\operatorname{ctg}\beta_2-U_2\right)\frac{\rho(D-\zeta_2)}{A_e^2}\overline{Q}\right](i\omega)+\left[\frac{\rho(D-\zeta_2)}{A_e^2}\overline{Q}-\frac{\rho\zeta_T}{A_i^2}\overline{Q}\right]=0 \quad (5)$$

в уравнения (3), (4), получим систему однородных линейных уравнений относительно $\tilde{Q}_{1,0}$, $\tilde{Q}_{2,0}$. Приравнивая к нулю детерминант матрицы этой системы линейных уравнений, получаем характеристическое уравнение: (5).

Уравнение (5) – уравнение третьего порядка относительно (iω) с вещественными коэффициентами. Из него мы можем найти комплексную частоту $\omega = \omega_R + i\omega_I$. Вещественная часть $\omega_R$ дает частоту, а мнимая часть $\omega_I$ – скорость затухания (декремент) возмущения.

Если $\omega_1 = \omega_{1R} + i\omega_{1I}$ является решением уравнения (5), то $\omega_2 = -\omega_{1R} + i\omega_{1I}$ является вторым решением. Решения $\omega_1$ и $\omega_2$ – по сути одно и то же решение с одинаковыми частотой и декрементом. Вещественная часть третьего решения равна нулю $\omega_{3R} = 0$. Таким образом имеем три решения: $\omega_1 = \omega_{1R} + i\omega_{1I}$, $\omega_2 = -\omega_{1R} + i\omega_{1I}$, $\omega_3 = i\omega_{3I}$.

Поскольку уравнение (5) является уравнением третьего порядка относительно (iω) с вещественными коэффициентами, то для получения условия устойчивости можно применить критерий Гурвица:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\zeta_T}{A_i^2}\overline{Q}\frac{L_e}{A_e}-\frac{L_i}{A_i}\frac{D-\zeta_2}{A_e^2}\overline{Q}\\ +2\alpha\frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{S}\left(\frac{\overline{Q}}{S}\operatorname{ctg}\beta_2-U_2\right)\frac{L_e}{A_e}\end{array}\right]\times$$
$$\left[\begin{array}{l}\frac{L_e}{A_e}+\frac{L_i}{A_i}-\frac{\zeta_T}{A_i^2}\frac{\rho C}{A_e^2}(D-\zeta_2)\overline{Q}^2\\ -2\rho C\alpha\frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{S}\left(\frac{\overline{Q}}{S}\operatorname{ctg}\beta_2-U_2\right)\frac{D-\zeta_2}{A_e^2}\overline{Q}\end{array}\right]>$$
$$\frac{L_i}{A_i}\frac{L_e}{A_e}\left[\frac{\zeta_2-D}{A_e^2}+\frac{\zeta_T}{A_i^2}\right]\overline{Q} \quad (6)$$

Неравенство (6) может быть использовано, чтобы определить зоны устойчивых / неустойчивых расходов. Однако проще изучать устойчивость, основываясь на непосредственном решении характеристического уравнения (5).

## ПРИЧИНЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Для анализа влияния диффузорности отсасывающей трубы уравнение (4) в [1] переписано как

$$\rho C\frac{L_e}{A_e}\frac{d^2\tilde{Q}_2}{dt^2}+\rho C\frac{\zeta_2-D}{A_e^2}\overline{Q}\frac{d\tilde{Q}_2}{dt}+\tilde{Q}_2$$
$$=\tilde{Q}_1+2\rho C\alpha\frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{S}\left(\frac{\overline{Q}}{S}\operatorname{ctg}\beta_2-U_2\right)\frac{d\tilde{Q}_1}{dt}$$

и рассмотрен случай отсутствия пульсаций в напорном водоводе: $\tilde{Q}_1 = 0$. В этом случае колебания нарастают при $D > \zeta_2$

Механизм развития неустойчивости может быть объяснен следующим образом. Допустим, $Q_2$ возрастает. Из уравнения (2) следует, что $p_a$ будет убывать при $D > \zeta_2$ вследствие эффекта диффузорности. При этом объем полости растет, а из (1) следует, что $Q_2$ нарастает при фиксированном $Q_1$. Эта положительная обратная связь и вызывает неустойчивость при наличии диффузора.

Влияние закрутки проще пояснить, если взять производную по времени от (3) и выразить $d^2\tilde{Q}_2/dt^2$ через оставшиеся члены. Подставляя результат в (4), получим следующее уравнение:

$$\rho C\frac{L_i}{A_i}\frac{d^2\tilde{Q}_1}{dt^2}+\left[\rho C\frac{\zeta_T}{A_i^2}\overline{Q}\right.$$
$$\left.+2\rho C\alpha\frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{S}\left(\frac{\overline{Q}}{S}\operatorname{ctg}\beta_2-U_2\right)\right]\frac{d\tilde{Q}_1}{dt}+\tilde{Q}_1=\tilde{Q}_2$$

Рассмотрим случай $\tilde{Q}_2 = 0$. Первый член в квадратных скобках отвечает за демпфирование, связанное с сопротивлением рабочего колеса. Второй член, представляющий эффект закрутки, может быть как отрицательным, так и положительным в зависимости от величины тангенциальной скорости $c_{\theta 2}$. Тангенциальная скорость обращается в нуль при значении расхода $Q_{sf} = SU_2 \operatorname{tg}\beta_2$ (расход, обеспечивающий течение без закрутки). При значениях расхода, меньших, чем $Q_{sf}$, закрутка дестабилизирует течение, уменьшая демпфирование. Расходы, большие, чем $Q_{sf}$, наоборот, способствуют стабилизации течения.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ЗА РАБОЧИМ КОЛЕСОМ

При определенных параметрах течения за рабочим колесом может возникать паровая, воздушно-паровая или воздушная полость. Нас будут интересовать режимы частичных или форсированных нагрузок, когда течение на входе в отсасывающую трубу является закрученным.

Для изучения кавитационного течения в отсасывающей трубе рассмотрим модели осесимметричных вихрей. При заданном распределении завихренности в цилиндрической области задача об отыскании поля скорости сводится к интегралу от $\omega_z(r)$ [4, 8, 9]

$$\Phi(r)=\frac{2\pi}{\Gamma}\int_0^r \omega_z(r')r'dr'$$

$$u_\theta=\frac{\Gamma}{2\pi r}\Phi(r),\quad u_z=u_0-\frac{\Gamma}{2\pi l}\Phi(r)$$

Здесь $u_\theta$ и $u_z$ окружная и осевая компоненты скорости; радиальная скорость тождественно равна нулю; Γ – интенсивность вихря, $h = 2\pi l$ – шаг винтовых линий, $u_0$ – значение осевой скорости на оси вихря. Распределение давления находится интегрированием:

$$p=p_0+\rho_l\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\int_0^r \Phi(r')^2\frac{dr'}{r'^3} \qquad (7)$$

где $p_0$ – давление на оси трубы, $\rho_l$ – плотность жидкости. Для удобства введем безразмерные завихренность и давление

$$\bar{\omega}_z=\frac{\pi\varepsilon^2}{\Gamma}\omega_z,\quad \bar{p}=\frac{8\pi^2\varepsilon^2}{\Gamma^2}\frac{p}{\rho_l} \qquad (8)$$

где ε – характерный размер вихря.

Рассмотрим три примера простейших распределений завихренности: равномерное распределение в ядре радиуса (модель I)

$$\bar{\omega}_z^{\mathrm{I}}=\begin{cases}1, & r<\varepsilon\\ 0, & r\ge\varepsilon\end{cases},\quad \Phi^{\mathrm{I}}(r)=\begin{cases}r^2/\varepsilon^2, & r<\varepsilon\\ 1, & r\ge\varepsilon\end{cases}$$

дробно-степенное распределение (модель II)

$$\bar{\omega}_z^{\mathrm{II}}=\left(1+\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)^{-2},\quad \Phi^{\mathrm{II}}(r)=\frac{r^2}{r^2+\varepsilon^2}$$

и гауссово распределение (модель III)

$$\bar{\omega}_z^{\mathrm{III}}=\exp\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right),\quad \Phi^{\mathrm{III}}(r)=1-\exp\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)$$

Распределения давления $\Delta\bar{p}=\bar{p}-\bar{p}_0$ для представленных моделей имеют вид

$$\Delta\bar{p}^{\mathrm{I}}=\begin{cases}r^2/\varepsilon^2, & r<\varepsilon\\ 2-\varepsilon^2/r^2, & r\ge\varepsilon\end{cases},\quad \Delta\bar{p}^{\mathrm{II}}=\frac{r^2}{r^2+\varepsilon^2},$$

$$\Delta\bar{p}^{\mathrm{III}}=2\log 2-\frac{\varepsilon^2}{r^2}\left[1-\exp\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right]^2$$
$$+2\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)-2\,\mathrm{Ei}\left(-2\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)$$

Здесь Ei – интегральная экспонента.

Для всех трех моделей минимум давления расположен на оси вихря (при r = 0). В жидкости при значении давления ниже давления насыщенных паров в приосевой области вихря возникает кавитационная полость. В модели предполагаем, что форма полости не меняется вдоль вихря, а ее граница совпадает с изолинией давления, равного давлению насыщенных паров.

Чтобы воспользоваться формулой для давления (7), необходимо знать константу $p_0$. С этой целью запишем давление, осредненное по входному сечению отсасывающей трубы гидротурбины, через интеграл Бернулли

$$p_m=p_a-\rho_l gH_s-\rho_l U_m^2/2$$

Здесь $p_a$ – атмосферное давление, $H_s$ – превышение уровня входного сечения над нижним бьефом, $U_m$ – среднерасходная скорость, $\rho_l$ – плотность воды, g – ускорение свободного падения. С другой стороны, осредненное по сечению давление вычислим по формулам (7, 8)

$$p_{mv}=p_0+\frac{\rho_l\Gamma^2}{4\pi^2\varepsilon^2R^2}\int_0^R r\Delta\bar{p}dr \qquad (9)$$

Интегрирование ведется по круговому сечению радиуса R. В результате получаем соотношения между $p_0$ и $p_m$ $\left[\Delta\bar{p}_{m0}=\bar{p}_m-\bar{p}_0\right]$ для трех моделей

$$\Delta\bar{p}_{m0}^{\mathrm{I}}=2\frac{R^2}{\varepsilon^2}-\frac{3}{2}-\ln\left(\frac{R^2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$\Delta\bar{p}_{m0}^{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\left[\frac{R^2}{\varepsilon^2}-\ln\left(1+\frac{R^2}{\varepsilon^2}\right)\right]$$

$$\Delta\bar{p}_{m0}^{\mathrm{III}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(2^{n-1}-1\right)}{n(n-1)n!}\left(\frac{R^2}{\varepsilon^2}\right)^n \qquad (10)$$

Приведем также связь между pm и давлением на стенке отсасывающей трубы $\Delta\bar{p}_{Rm} = \bar{p}_R - \bar{p}_m$

$$\Delta\bar{p}^{\mathrm{I}}_{Rm} = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{R^2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$\Delta\bar{p}^{\mathrm{II}}_{Rm} = \ln\left(1 + \frac{R^2}{\varepsilon^2}\right) - \frac{R^2}{R^2 + \varepsilon^2}$$

$$\Delta\bar{p}^{\mathrm{III}}_{Rm} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(2^n - 2\right)}{n\,n!} \left(\frac{R^2}{\varepsilon^2}\right)^n \qquad (11)$$

Полагая $p_{mv} = p_m$, находим давление $p_0$ из уравнения (9). Когда $p_0$ оказывается меньше давления насыщенных паров воды $p^{wvp}$, возникает кавитационная полость. При этом профиль давления изменяется: в области минимума образуется «полочка» и вместо формулы (7) получаем новое уравнение

$$p = \begin{cases} p_c, & r < r_c \\ p_c + \rho_l \dfrac{\Gamma^2}{4\pi^2} \displaystyle\int_{r_c}^{r} \Phi(r')^2 \frac{dr'}{r'^3} & r \ge r_c \end{cases} \qquad (12)$$

где $r_c$ – радиус кавитационной полости, $p_c$ – давление внутри полости.

В работах [1, 2] давление в полости $p_c$ было выражено через окружающее давление $p_a$ и значение окружной скорости на периферии за рабочим колесом $u_\theta(R)$:

$$p_c = p_a - \alpha \rho_l u_{\theta R}^2$$

Для вихря Рэнкина с радиусом ядра ε было установлено, что $\alpha = (R/\varepsilon)^2 - 1/2$. В самом деле, из формул (10), (11) для модели I находим давление на стенке трубы

$$p_R^{\mathrm{I}} = p_0 + \frac{\rho_l \Gamma^2}{8\pi^2 \varepsilon^2}\left(2 - \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)$$

Если положить окружающее давление равным давлению на стенке $p_a = p_R$, а давление в полости равным давлению на оси потока $p_c = p_0$, то с учетом величины периферийной окружной скорости $u_\theta(R) = \Gamma / 2\pi R$ получим то же значение коэффициента α. Однако уравнение Бернулли дает некоторое осредненное по сечению давление, а не его величину на стенке трубы. Чтобы найти осредненное давление, проинтегрируем формулу (12) по сечению трубы

$$p_{mc} = p_c + \frac{\rho_l \Gamma^2}{2\pi^2 R^2} \int_{r_c}^{R}\int_{r_c}^{r} \Phi(r')^2 \frac{dr'}{r'^3} r dr \qquad (13)$$

Наконец, принимая во внимание (2), выведем формулу для коэффициента α

$$\alpha = \frac{2}{\Phi(R)^2} \int_{r_c}^{R}\int_{r_c}^{r} \Phi(r')^2 \frac{dr'}{r'^3} r dr$$

Формула (13) дает уравнения для определения радиуса кавитационной полости при заданных осредненном давлении и интенсивности вихря $\left[\Delta\bar{p}_{mc} = \left(\bar{p}_{mc} - \bar{p}_c\right)\right]$

$$\Delta\bar{p}^{\mathrm{I}}_{mc} = \frac{r_c^4}{2\varepsilon^4} - \frac{r_c^2 R^2}{\varepsilon^4} + \frac{2R^2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{2} - \ln\frac{R^2}{\varepsilon^2}$$

$$\Delta\bar{p}^{\mathrm{II}}_{mc} = \frac{R^2 + \varepsilon^2}{r_c^2 + \varepsilon^2} - \ln\left(\frac{R^2 + \varepsilon^2}{r_c^2 + \varepsilon^2}\right) - 1 \qquad (14)$$

$$\Delta\bar{p}^{\mathrm{III}}_{mc} = f_1\left(\frac{r_c^2}{\varepsilon^2}\right) + \frac{R^2}{\varepsilon^2} f_2\left(\frac{r_c^2}{\varepsilon^2}\right) + f_3\left(\frac{R^2}{\varepsilon^2}\right)$$

Функции $f_i$ содержат интегральную экспоненту и интеграл от нее. Удобнее представить их в виде рядов:

$$f_1(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(n+1)!} \frac{(-x)^n}{n}$$

$$f_1(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(n+1)!} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)}$$

$$f_3(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(n+1)!} \frac{(-x)^{n+1}}{n(n+1)}$$

Для модели I интегрирование дает уравнение, выведенное ранее в работе [10]. Это биквадратное уравнение легко разрешается относительно $r_c$. Для коэффициента α получаем формулу

$$\alpha = \frac{r_c^4}{4\varepsilon^4} - \frac{r_c^2 R^2}{2\varepsilon^4} + \frac{R^2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{R^2}{\varepsilon^2} \qquad (15)$$

В примерах расчетов [1] авторы брали значение $\alpha = (R/\varepsilon)^2 - 1/2 = 10$, т.е. $\varepsilon \approx 0{,}3086$ R. Из формулы (15) следует, что даже при очень малом размере полости при данном соотношении ε / R получаем значение $\alpha \approx 8{,}57$ вместо 10. То есть эффект закрутки значительно слабее, чем предсказано в работах [1, 2]. Более того, коэффициент α уменьшается с ростом радиуса полости: с 8,57 при $r_c = 0$ до 3,57 при $r_c = \varepsilon$ (см. рис.2).

Коэффициент α для модели II меняется в диапазоне от 4,83 до 1,80 при изменении радиуса полости от 0 до ε. В модели III диапазон изменения коэффициента α – от 5,66 до 2,41.

Зависимости $r_c^2/\varepsilon^2$ от безразмерного давления $\Delta\bar{p}_{mc} = 8\pi^2 R^2 (p_{mc} - p_c)/\rho_l \Gamma^2$, рассчитанные для случая ε = 0,5 R для всех трех моделей, представлены на рис.3.

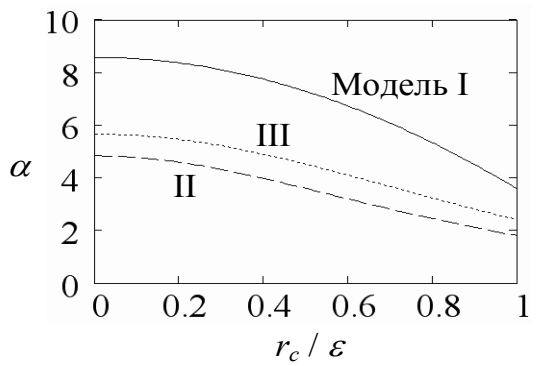


Рис.2 Зависимость коэффициента α от радиуса полости.

Мы ограничиваем область значений rc < ε, так как для вихря Рэнкина полость не может быть больше, чем ядро. Как видно из графика, при одинаковых интенсивности вихря Г и радиусе ядра ε модели предсказывают существенно отличающиеся размеры кавитационной полости.

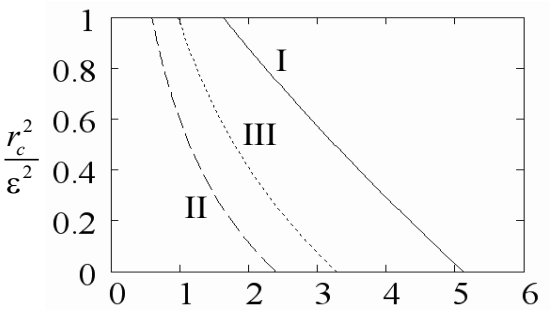


Рис.3 Зависимость объема полости от давления.

При определении кавитационной податливости C = $dV_c/dp$ объем каверны будем считать пропорциональным площади сечения каверны на входе в отсасывающую трубу. Саму форму каверны приведем к цилиндру эффективной длины $l_c$, т.е. Vc = π lc $r_c^2$. Теперь, чтобы найти кавитационную податливость для рассматриваемых моделей вихрей, следует продифференцировать формулы (14) относительно $r_c^2$ и взять обратную величину. Графики зависимости безразмерной величины $\overline{C} = k_c \rho_l \Gamma^2 / 8\pi^3 R^2 l_c \varepsilon^2$ от $\Delta\overline{p}_{mc}$ представлены на рис.4, рассчитанные снова при ε = 0,5 R.

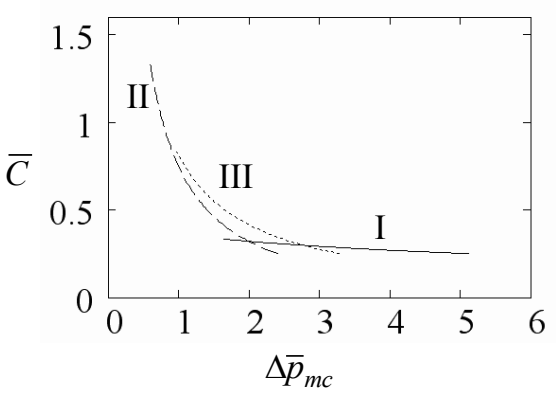


Рис.4 Зависимость кавитационной податливости от давления.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выявлено влияние характера распределения завихренности и размера кавитационной полости за рабочим колесом гидротурбины на коэффициенты характеристического уравнения, решение которого дает собственные частоты и инкременты колебаний. Показано, что влияние закрутки на устойчивость значительно меньше, чем описывалось в литературе, более того это влияние быстро уменьшается с ростом размера кавитационной или газовой полости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chen C., Nicolet C., Yonezawa K., Farhat M., Avellan F., Tsujimoto Y. One-dimensional analysis of full load draft tube surge // J. Fluids Eng. – 2008. – Vol. 130. – P. 041106-1 – 041106-6.
2. Chen C., Nicolet C., Yonezawa K., Farhat M., Avellan F., Tsujimoto Y. One-Dimensional Analysis of Full Load Draft Tube Surge Considering the Finite Sound Velocity in the Penstock // J. Fluid

Machinery and Systems. – 2009. Vol. 2, No. 3. – P. 260 – 268.
3. Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L., Shtork S.I. Vortex precession in a gas-liquid flow // Heat Transfer Research. – 2010. – Vol. 41, Iss. 4. – P. 467 – 479.
4. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 504 С.
5. Kuibin P.A., Okulov V.L., Pylev I.M. Simulation of flow structure in the suction pipe of a hydroturbine by integral characteristics // Heat Transfer Research. 2006. Vol. 37, Iss. 8. – P. 675–684.
6. Kuibin P.A. A model of gas-liquid swirl flow // Abs. 8th European Fluid Mechanics Conf. Bad Reichenhall, Germany, 13-16 September, 2010. – P. S5-26.
7. Susan-Resiga R., Ciocan G. D., Anton I., Avellan F. Analysis of the Swirling Flow Downstream a Francis Turbine Runner // J. Fluids Eng. – 2006. – Vol. 128. – P. 177 – 189.
8. Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L., Shtork S.I. Helical vortices in swirl flow // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 382. – P. 195 – 243.
9. Куйбин П.А., Окулов В.Л. Одномерные решения для течений с винтовой симметрией // Теплофизика и аэромеханика. – 1996. – № 4. – С. 311 – 315.
10. Wang X., Nishi M., Tsukamoto H. A simple model for predicting the draft tube surge // Proc. 17th IAHR Symposium, Beijing, China, 1994. – P. 95 – 105.