УДК 536.24

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ СТЕНКУ

Видин Ю.В., Иванов Д.И.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

АННОТАЦИЯ

С использованием аналитических зависимостей разработан аналитический приближенный метод расчета нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку различной толщины при граничных условиях третьего рода. Показано, что высокая точность расчета может быть достигнута с помощью доступных математических преобразований – элементарных тригонометрических функций, т.е. не прибегая к сложным специальным функциям Бесселя. При этом в характеристическом уравнении значительно уменьшается число параметров. Также предложен приближенный аналитический метод расчета собственных чисел задачи о нестационарном несимметричном температурном поле, который позволяет производить расчеты, используя широко известные математические зависимости.

ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1] рассмотрена задача нестационарного теплопереноса в стенке неограниченного полого цилиндрического тела при граничных условиях третьего рода на внутренней и внешней поверхностях. При этом температура среды, движущейся внутри трубы и омывающей ее снаружи, приняты одинаковыми. На основе метода разделения переменных автором работы [1] получено аналитическое решение сформулированной задачи. Это решение может быть сравнительно просто распространено на более важный случай, а именно когда температуры движущихся сред внутри и снаружи прямолинейной цилиндрической трубы разные, т.е. когда будет иметь место процесс теплопередачи через стенку. Однако для инженерных расчетов рекомендуемые математические зависимости [1] являются сложными, что весьма затрудняет проведение по ним технических вычислительных действий. Особенно сложным и громоздким оказывается решение характеристического уравнения для определения собственных чисел исследуемого процесса. Это в основном обусловлено наличием в нем большого числа сложных специальных функций Бесселя и сравнительно значительным количеством параметров. Данное затруднение можно в определенной степени уменьшить, если воспользоваться предлагаемым ниже приближенным методом.

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ СТЕНКУ

Проиллюстрируем особенность такого подхода на примере названной задачи, которую сформулируем следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right), \qquad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha_1 (t_{c1} - t) \text{ при } r = R_1, \qquad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha_2 (t_{c2} - t) \text{ при } r = R_2, \qquad (3)$$

$$t = t(r) \text{ при } \tau = 0. \quad (5)$$

В системе уравнений (1) – (4), записанной в размерном виде, использованы общепринятые обозначения. Путем замены искомой переменной

$$t(\tau, r) = \vartheta^*(r) - \vartheta(r, \tau), \quad (5)$$

где ϑ*(r) – стационарное поле температуры в цилиндрической стенке, описываем выражением

$$\vartheta^*(r) = t_{c1} - (t_{c1} - t_{c2}) \frac{\frac{1}{Bi_1} + \ln(\psi)}{\frac{1}{Bi_1} + \frac{1}{Bi_2} + \ln(\psi^*)}, \quad (6)$$

где $Bi_1=\alpha_1 R_1/\lambda$, $Bi2=\alpha_2 R_2/\lambda$ – безразмерные числа подобия (числа Био), $\psi=r/R_1$, - безразмерная радиальная координата ($1\le\psi\le\psi^*$), $\psi^*=R_2/R_1$.

Задачу (1) – (4) приводим к виду

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\psi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = Bi_1 \vartheta \text{ при } \psi = 1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = -Bi_2 \psi^* \vartheta \text{ при } \psi = \psi^*, \quad (9)$$

$$\vartheta = \vartheta(\psi) \text{ при } Fo = 0. \quad (10)$$

Здесь начальное распределение температуры в модифицированной записи исходной задачи равно

$$\vartheta(\psi) = \vartheta^*(\psi) - t(r,0). \quad (11)$$

Основная математическая сложность интегрирования уравнения (7) заключается в наличии в его правой части переменного коэффициента 1/ψ. Этот коэффициент согласно постановке задачи меняется в пределах

$$b_{\max} = 1 \ge b = \frac{1}{\psi} \ge b_{\min} = \frac{1}{\psi^*}. \quad (12)$$

Если в (7) заменить этот коэффициент некоторой фиксированной величиной b, например, принять среднее значение из интервала (12), вместо (7), можно записать дифференциальное уравнение в форме

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \psi^2} + b\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi}. \quad (13)$$

Благодаря этому искомое решение удается представить вместо функций Бесселя через элементарные функции.

Введем предварительно новую переменную

$$\vartheta = e^{-\frac{b}{2}\psi} U. \quad (14)$$

Тогда задача (13), (8) – (10) преобразуется к виду

$$\frac{\partial U}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} - \frac{b^2}{4}U, \quad (15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = Bi_1^* U, \text{ при } \psi = 1, \quad (16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = -Bi_2^* U, \text{ при } \psi = \psi^*, \quad (17)$$

$$U = U(\psi), \text{ при } Fo = 0, \quad (18)$$

где $Bi_1^*=Bi_1-b/2$; $Bi_2^*=Bi_2\psi^*+b/2$; $U(\psi,0) = e^{\frac{b}{2}\psi}\vartheta(\psi,0)$.

Используя классический метод разделения переменных [1], решение системы уравнений (15) – (18) можно записать в виде бесконечной суммы

$$U(\psi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\cos\left(\sqrt{\mu_n^2 - \frac{b^2}{4}}\psi\right) + B_n \sin\left(\sqrt{\mu_n^2 - \frac{b^2}{4}}\psi\right)\right] e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (19)$$

Здесь коэффициенты B_n рассчитываем по выражению

$$B_n = \frac{\beta_n \sin\beta_n + Bi_1^* \cos\beta_n}{\beta_n \cos\beta_n - Bi_1^* \sin\beta_n}, \quad (20)$$

где $\beta_n = \sqrt{\mu_n^2 - \frac{b^2}{4}}$.

Определение собственных чисел задачи μn осуществляем на основе характеристического уравнения

$$ctg\beta_n(\psi^* - 1) = \frac{\beta_n^2 - Bi_1^* Bi_2^*}{\beta(Bi_1^* + Bi_2^*)}. \quad (21)$$

В этом случае формула (19) будет строго удовлетворять уравнениям (15) – (17).

Коэффициенты ряда A_n находятся из начального условия (18), т.е. должно выполняться равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos\beta_n\psi + B_n \sin\beta_n\psi) = U(\psi)$$

на отрезке $1\le\psi\le\psi^*$. (22)

Число параметров в характеристическом уравнении (21) может быть сокращено, если ввести величину

$$\lambda_n = \beta_n(\psi^* - 1) \ . \qquad (23)$$

Тогда вместо (21) получим

$$ctg\lambda_n = \frac{\lambda_n^2 - Bi_1^{**} Bi_2^{**}}{\lambda_n\left(Bi_1^{**} + Bi_2^{**}\right)}, \qquad (24)$$

где $Bi_1^{**} = Bi_1^*(\psi^* - 1)$, $Bi_2^{**} = Bi_2^*(\psi^* - 1)$.

В работе [2] приведены обширные и подробные таблицы значений нескольких первых корней зависимости подобной формуле (24).

Характеристическое уравнение для нахождения корней по точному аналитическому решению рассмотренной задачи согласно [1] имеет вид

$$\frac{Bi_1 J_0(\mu) + \mu J_1(\mu)}{Bi_1 Y_0(\mu) + \mu Y_1(\mu)} = \frac{Bi_2 J_0(\mu\psi^*) - \mu J_1(\mu\psi^*)}{Bi_2 Y_0(\mu\psi^*) - \mu Y_1(\mu\psi^*)}, \qquad (25)$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ - функции Бесселя второго рода нулевого и первого порядка соответственно [3].

Приближенные значения μ_n удовлетворительно согласуются с аналогичными корнями, определенными по выражению (25). С ростом порядкового номера n и уменьшением параметра ψ^* (с уменьшением толщины стенки рассматриваемого цилиндра) расхождение существенно снижается.

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЗАДАЧИ

Для получения приближенного аналитического решения описанной выше задачи необходимо знать собственные числа, которые удовлетворяют характеристическому уравнению (24).

Уравнение (24) относится к классу трансцендентных и в данном случае может быть решено только приближенно.

В работе [2] приведены многочисленные таблицы значений первых шести чисел λ_n для различных комбинаций величин Bi_1 и Bi_2. Однако, в инженерных расчетах более удобно использовать аналитические зависимости для нахождения корней λ_n [3]. Из анализа формулы (24) следует, что величины λ_n в общем случае должны располагаться в интервалах

$$(n-1)\pi \le \lambda_n \le n\pi \ , \ n = 1, 2, ... \qquad (26)$$

Причем, если произведение $Bi_1 Bi_2 \le \frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2$, то тогда корни λ_n будут находиться в более узком интервале

$$(n-1)\pi \le \lambda_n \le \frac{2n-1}{2}\pi \ , \qquad (27)$$

а если $Bi_1 Bi_2 \ge \frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2$, то в этом случае

$$\frac{2n-1}{2}\pi \le \lambda_n \le n\pi \ . \qquad (28)$$

Нестационарный процесс переноса тепла через стенку от греющей среды к нагреваемой начинается с момента времени, когда производная температуры по пространственной координате со стороны среды с меньшей температурой переходит нулевое значение. В этом случае наибольший интерес в аналитическом решении для температурного поля представляет первый корень уравнения (24). Для расчета данного собственного числа целесообразно представить правую часть формулы (24) в виде степенной зависимости [4]

$$ctg\lambda = \frac{1}{\lambda} - \left(\frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda^3}{45} + \frac{2\lambda^5}{945} + ...\right) \ . \qquad (29)$$

Степенной ряд (29) справедлив, если $0<\lambda<\pi$. Очевидно, чем меньше значение λ, тем быстрее сходится данная сумма.

Если в выражении (29) ограничиться первыми тремя слагаемыми, то тогда зависимость (24) можно аппроксимировать биквадратным алгебраическим уравнением

$$\lambda^4 + \frac{45}{Bi_1 + Bi_2}\left(1 + \frac{Bi_1 + Bi_2}{3}\right)\lambda^2 - \frac{45}{Bi_1 + Bi_2}\left(Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2\right) = 0 \ . \qquad (30)$$

Решая данное уравнение, нетрудно получить математическое соотношение для определения искомого первого собственного числа

$$\lambda_1 = \sqrt{A\left[\sqrt{1 + \frac{45}{A^2}\left(1 + \frac{Bi_1 Bi_2}{Bi_1 + Bi_2}\right)} - 1\right]_0} \ , \qquad (31)$$

где коэффициент A равен

$$A = \frac{45\left(1 + \frac{Bi_1 + Bi_2}{3}\right)}{2\left(Bi_1 + Bi_2\right)} \ .$$

Приближенное значение λ_1 рассчитанное по (7) позволяет оценить величину λ_1 сверху. При этом если в случае $Bi_1 Bi_2 < \pi/4$ число λ_1 получается согласно зависимости более $\pi/2$, то нужно в качестве максимально возможного принять $\lambda_1 = \pi/2$, являющегося предельным в этом интервале.

Используя λ_{1max} можно на основе (24) вычислить минимальное значение λ_{1min} с помощью зависимости

$$ctg\lambda_{1\min} = \frac{\lambda_{1\max}^2 - Bi_1 Bi_2}{\lambda_{1\max}\left(Bi_1 + Bi_2\right)} . \qquad (32)$$

Таким образом, легко установить сравнительно узкий диапазон нахождения фактического числа λ_1

$$\lambda_{1min} < \lambda_1 < \lambda_{1max}.$$

Процедура расчета по формуле (32) существенно упрощается при использовании высокоточных пятизначных математических таблиц [5].

В таблице 1 приведены расчеты первого корня уравнения (24) на основе приближенного соотношения (31) и последующей серии рекомендуемых итераций для фиксированного значения Bi_1=0,1 и четырех величин Bi_2 (0,1; 1; 5; 10). Здесь же указаны λ_n, полученные автором работы [2].

Таблица 1. Первые собственные числа

Bi_2	λ_1	λ_{1max}	λ_{1min}	λ_{1max}
	согласно [2]	согласно (31)	первая итерация	
	Bi_1=0,1			
0,1	0,44352	0,44353	0,44351	0,44353
1	0,92925	0,92988	0,92885	0,92952
5	1,37502	1,38543	1,37255	1,37562
10	1,48991	1,50857	1,48726	1,49029

Из таблицы следует, что полученные расчетные значения λ_1 весьма близки к известным [2].

В таблице 2 представлены подобные расчеты для второго корня.

Таблица 2. Вторые собственные числа

Bi_2	λ_2	λ_{2max}	λ_{2min}	λ_{2max}
	согласно [2]	согласно (31)	первая итерация	
	Bi_1=0,1			
0,1	3,20399	4,71239	3,18403	3,20438
1	3,45248	4,71239	3,37026	3,45970
5	4,05556	4,71239	3,97781	4,06549
10	4,32711	4,71239	4,29323	4,33015

Предложенный подход может быть успешно применен и при исследовании ряда других сходных характеристических уравнений [6].

ВЫВОДЫ

В статье показано, что высокая точность расчета нестационарной теплопередачи через цилиндрическую стенку может быть достигнута с помощью приближенного решения поставленной задачи. При этом точность расчета повышается с уменьшением толщины стенки рассматриваемого цилиндра.

Характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел упрощается за счет:

уменьшения числа параметров в уравнении;

использования вместо сложных Бесселевых функций элементарных тригонометрических;

решение замещенного характеристического уравнения осуществляется приближенно – аналитически с высокой степенью точности;

корни замещенного характеристического уравнения могут быть получены по монографии [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 С.
2. Михайлов М.Д. Нестационарные температурные поля в оболочках. – М.: Энергия, 1967. – 120 С.
3. Видин Ю.В., Бойков Г.П., Колосов В.В., Ромащенко А.С. Краткий справочник по тепломассообмену. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т; Политехн. ин-т, 2007. – 169 С.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов – М.: Наука, 1965. – 608 С.
5. Сегал Б.И., Семендяев К.А.. Пятизначные математические таблицы. – М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962. 464 С.
6. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 184 С.

© Видин Ю.В., Иванов Д.И.