УДК 532.7+532.516.5+532.593

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ЖИДКОСТЬ-ПАР В СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Куперштох А.Л.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-08-00805), Президента Российской федерации (грант НШ-247.2012.1) и Сибирского отделения РАН (проекты № 38 и № 79).

АННОТАЦИЯ

При моделировании фазовых переходов метод решеточных уравнений Больцмана (LBE) представляет собой метод сквозного счета границ раздела фаз. Использование графических ускорителей (Graphics Processing Unit, GPU) позволило выйти на принципиально новый уровень моделирования мультифизических задач. Были проведены трехмерные расчеты спинодальной декомпозиции на сетках свыше 250 миллионов узлов. Выполнено моделирование анизотропного распада бинарных смесей жидкого диэлектрика и растворенного газа в экстремальных электрических полях на двухфазную систему нитевидных парогазовых каналов в жидкости. Парогазовые каналы расширяются как за счет диффузии растворенного газа из жидкости и испарения жидкого вещества внутрь каналов, так и за счет коалесценции каналов друг с другом. Показано, что критическая напряженность однородного электрического поля значительно уменьшается при увеличении концентрации растворенного газа. Это указывает на то, что в наносекундном диапазоне пробоя реальных жидких диэлектриков возможен такой механизм зарождения, роста и ветвления каналов стримеров путем анизотропного (электрострикционного) распада.

ВВЕДЕНИЕ

Для веществ с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от плотности, находящихся первоначально в однородном стабильном жидком состоянии, возможен анизотропный распад на жидкую и газовую фазы под действием сильных электрических полей [1,2]. Принципиально то, что новые участки менее плотной фазы возникают в виде узких каналов, ориентированных вдоль поля. Анизотропный распад позволяет легко объяснить ряд экспериментально наблюдаемых явлений при пробое жидких диэлектриков [3] (высокие скорости распространения стримерных каналов более 100 км/с, возникновение веера несветящихся каналов пониженной плотности вблизи острия с последующим пробоем одного из них, примерно цилиндрическую форму сегментов каналов и их ветвление). Авторы экспериментальной работы [3] объясняют свои результаты по пробою жидких диэлектриков, основываясь на нашей модели роста стримеров по механизму анизотропного распада жидких диэлектриков в электрическом поле, предложенной в [1,4]. Однако для анизотропного распада чистых диэлектриков необходимы электрические поля начиная с десятков МВ/см. В большинстве же экспериментов по пробою электрические поля значительно меньше (от нескольких десятых до нескольких единиц МВ/см).

В данной работе проведено трехмерное моделирование анизотропного распада бинарных смесей типа жидкий диэлектрик – растворенный газ. Для компьютерного моделирования эволюции таких систем с возникающими границами раздела фаз жидкость-пар используется метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Equation, LBE), который

в настоящее время широко применяется для моделирования течений жидкостей, включая многофазные и многокомпонентные. Для бинарных систем с растворенным газом величина критического электрического поля оказалась гораздо меньше, чем для чистого жидкого диэлектрика. При пробое жидких диэлектриков в сильных электрических полях описанная анизотропная неустойчивость, возможно, является определяющим механизмом зарождения газовой фазы, возникновения проводящих стримерных структур, их быстрого распространения в виде тонких каналов, а также их ветвления в процессе распространения.

МЕТОД РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Для компьютерного моделирования эволюции систем с границами раздела фаз жидкость-пар используется метод LBE, который в настоящее время широко применяется для моделирования течений жидкости, включая многофазные и многокомпонентные [5-8]. Метод LBE представляет собой дискретную модель сплошной среды. В отличие от классических методов расчета течений жидкости путем решения уравнений Навье – Стокса метод решеточных уравнений Больцмана рассматривает течение как движение ансамбля псевдо-частиц, имеющих некоторую функцию распределения по дискретным скоростям $\mathbf{c}_k$. Обоснованием метода LBE является тот факт, что во втором порядке разложения Чепмена – Энскога из уравнений LBE получаются макроскопические уравнения гидродинамики, то есть уравнения неразрывности и Навье – Стокса.

Для трехмерных расчетов использовался девятнадцатискоростной вариант метода LBE – D3Q19 [9].

Цикл вычислений для однокомпонентной модели LBE с фазовыми переходами организован следующим образом:

1. Перенос значений функций распределения в соседние узлы

$$\widetilde{N}_k(\mathbf{x},t) = N_k(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k\Delta t, t - \Delta t)$$

2. Вычисление плотности и значений функции в каждом узле с использованием уравнения состояния

$$\rho = \sum\nolimits_{k=0}^{b} \widetilde{N}_k \ ,$$

$$\Phi = \sqrt{\rho\theta - P(\rho,T)} \ .$$

3. Вычисление полной силы, действующей на узел со стороны соседних узлов, с использованием идеи псевдопотенциала $\mathbf{F} = -\nabla U$, впервые предложенной в [10]. В работах [5-8,11] была введена новая функция $\Phi = \sqrt{-U}$, где $U = P(\rho,T) - \rho\theta$. Вычисление полной силы выполнялось по конечно-разностной аппроксимации следующего выражения

$$\mathbf{F} = A\nabla(\Phi^2) + 2(1-A)\Phi\nabla\Phi \ ,$$

где A – свободный параметр, обеспечивающий достаточно точное воспроизведение кривой сосуществования фаз. Для уравнения состояния Ван-дер-Ваальса он равен –0.152 [5].

4.1. Вычисление значений скорости в узле до и после действия сил

$$\rho\mathbf{u} = \sum\nolimits_{k=0}^{b} \mathbf{c}_k \widetilde{N}_k \ ,$$

$$\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{F}\Delta t / \rho \ .$$

4.2. Вычисление соответствующих равновесных функций распределения по формуле

$$N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}) = \rho w_k \left(1 + \frac{\mathbf{c}_k\mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k\mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2\theta}\right).$$

4.3. Изменение функций распределения в узлах за счет оператора столкновений Ω_k и за счет действия сил $\Delta\widetilde{N}_k$

$$N_k(\mathbf{x},t) = \widetilde{N}_k(\mathbf{x},t) + \Omega_k(\widetilde{N}(\mathbf{x},t) + \Delta\widetilde{N}_k \ ,$$

где оператор столкновений имеет вид

$$\Omega_k = (N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}) - \widetilde{N}_k(\mathbf{x},t))/\tau \ ,$$

а учет действия объемных сил выполняется по методу точной разности [7,12,13]

$$\Delta\widetilde{N}_k(\mathbf{x},t) = N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}) - N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}) \ .$$

В настоящей работе использовалось уравнение состояния Ван-дер-Ваальса, которое в приведенных переменных $\widetilde{P} = P/P_{\text{кр}}$, $\widetilde{\rho} = \rho/\rho_{\text{кр}}$ и $\widetilde{T} = T/T_{\text{кр}}$ имеет вид

$$\widetilde{P} = \frac{8\widetilde{\rho}\widetilde{T}}{3-\widetilde{\rho}} - 3\widetilde{\rho}^2 \ .$$

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

Графические процессоры на видеокартах – Graphics Processing Unit (GPU) дают возможность выполнять параллельные вычисления на большом количестве ядер. Параллельные расчеты выполнялись на графических модулях фирмы NVIDIA с архитектурой “Fermi”, имеющих 512 потоковых процессоров (ядер). Все ядра имеют доступ к относительно быстрой общей внутренней памяти объемом 3 Гб для GTX-580 и 6 Гб для Tesla M2090. Алгоритм LBE включает в себя вычисления преимущественно в локальном узле расчетной сетки, за исключением переноса частиц и сил взаимодействия между узлами, что позволяет его распараллелить на большое количество ядер с использованием технологии CUDA (Compute Unified Device Architecture). При этом ускорение расчетов на одном графическом ускорителе GTX-580 для трехмерного однокомпонентного варианта метода LBE с фазовыми переходами достигало 70–90 раз [8] при вычислениях с двойной точностью по сравнению с одним ядром процессора Intel Core 2 Duo с частотой 3.3 ГГц.

Четыре ядерные функции, соответствующие 4 этапам цикла вычислений, были названы MOVE_f, DENSITY, FORCE и COLLIS. Относительное время выполнения ядерных функций в цикле вычислений для трехмерной модели D2Q19 показано на гистограмме, выдаваемой стандартным профайлером пакета CUDA 4.0 (рис.1). Основное время занимают: вычисления оператора столкновений, вычисление скорости и равновесных функций распределения (COLLIS), перенос значений функций распределения в соседние узлы (MOVE_f), вычисление плотности и функций в каждом узле (DENSITY), вычисление сил (FORCE) и периодические граничные условия по (BOUND_X). Остальные затраты времени, связанные с граничными условиями и передачей данных между GPU и CPU, занимают менее 1 % времени вычислений. Использование алгоритма со сменой указателей при переносе значений функций распределения в соседние узлы через один буферный массив почти в два раза уменьшило затрачиваемое на это время по сравнению с более ранним алгоритмом [8]. Производительность одного графического ускорителя GTX-580 для однокомпонентной двухфазной модели составила ~ 90 миллионов узлов сетки в секунду (Million Node Updates Per Second, MNUPS).

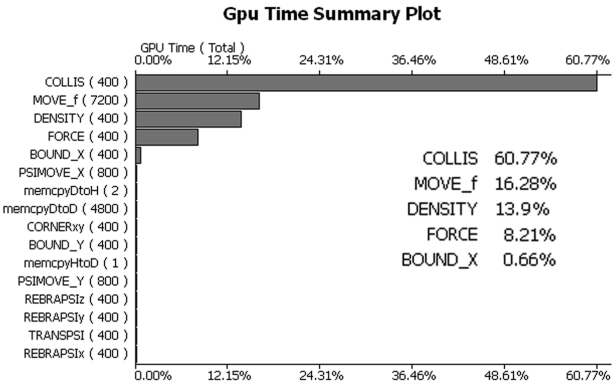

Рис.1 Относительное время выполнения ядерных функций, усредненное за 400 шагов по времени. Расчет на GTX-580 на сетке 256×256×192.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПИНОДАЛЬНОГО РАСПАДА МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Для тестирования трехмерных расчетов использовалась задача о спинодальной декомпозиции (распад первоначально однородного флюида, состояние которого находится под спинодалью, на двухфазную систему жидкость-пар). На рис. 2б показан пример расчета спинодальной декомпозиции в трехмерной области размерами 512×512×960. Всего более 250 миллионов узлов расчетной сетки. Время расчета 30 минут. По всем трем координатам x, y и z использованы периодические граничные условия. В определенном диапазоне начальных плотностей флюида после некоторого промежутка времени происходит распад на жидкую и газовую фазы. Жидкая фаза образует проницаемую пористую среду. Со временем мелкомасштабные структуры укрупняются.

Расчеты проводились на 12 GPU (Tesla-M2090, каждый позволяет использовать до 5.3 Гб внутренней памяти с контролем четности) на кластере Новосибирского государственного исследовательского университета “SL390s-G7” с операционной системой “Linux Enterprise server 11”. Использовалось более 6000 ядер. На каждом GPU рассчитывалась область размером 512×512×80. Данные с первого GPU показаны на рис.2а. Граничные условия по ко-

ординате z, соответствующие граням размером 512×512, передавались между узлами кластера по протоколу MPI (Message Passing Interface).

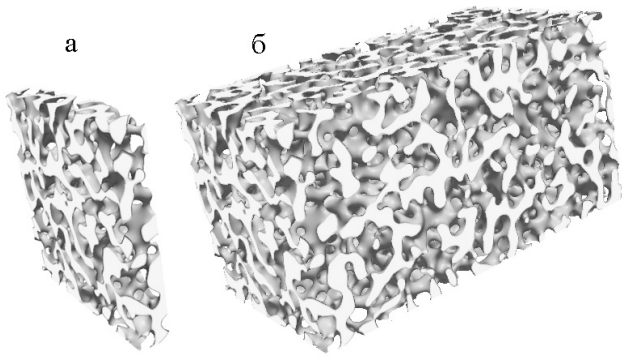

Рис.2 Расчет спинодальной декомпозиции на 12 GPU. Паровая фаза показана прозрачной. $\widetilde{T} = 0.7$, $\widetilde{\rho}_0 = 1.0$, $t = 2000$ шагов. Сетка 512×512×960. Производительность 250 MNUPS. Время расчета ~ 30 минут.

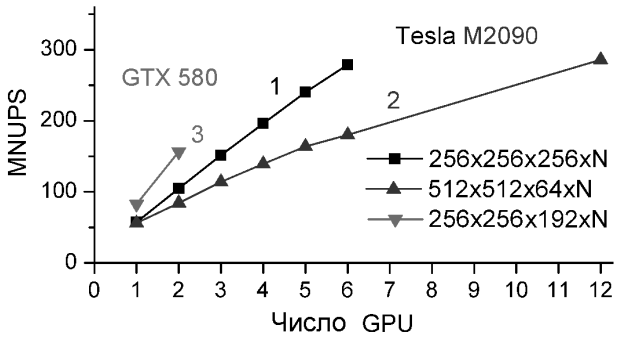

Рис.3 Производительность расчетов для трехмерного варианта метода LBE – D3Q19.

На рис.3 показана производительность вычислений в миллионах узлов сетки в секунду для трехмерного однокомпонентного варианта метода LBE – D2Q19 с фазовыми переходами.

Данные 1–2 получены нами на кластере Новосибирского государственного исследовательского университета “SL390s-G7” с использованием протокола MPI. В этих расчетах на каждом вычислительном узле использовался 1 модуль Tesla M2090. Данные 3 получены нами на станции, имеющей 2 модуля GTX 580 с 3 Гб внутренней памяти каждый. Граничные условия по координате z передавались между GPU по шине PCI-Express без использования MPI. Все расчеты проведены при вычислениях с двойной точностью. Видно, что производительность сильно зависит не только от типа используемых GPU, но и от и способа передачи данных между GPU.

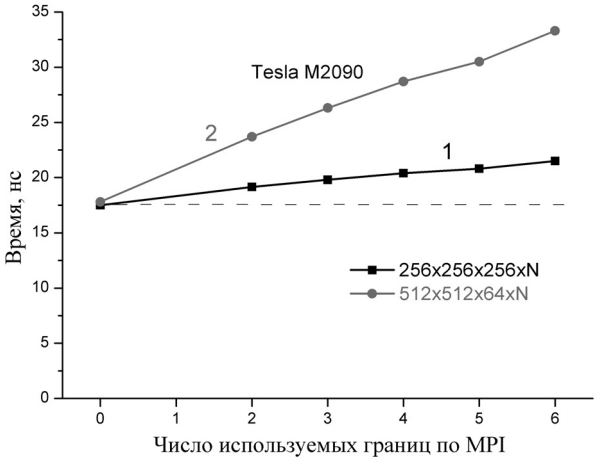

Рис.4 Время вычислений одного шага цикла, нормированное на количество узлов расчетной сетки, размещенных в одном GPU.

На рис.4 показано время вычисления одного шага цикла, нормированное на число узлов расчетной сетки, размещаемых в одном GPU, для однокомпонентной модели с фазовыми переходами. Оно включает время, затрачиваемое на передачу значений функций на границах между узлами кластера с использованием протокола MPI. При расчетах на одном узле кластера граничные условия по z передавались с помощью функции CUDA – “cudaMemcpyPeer()” без использования MPI. При увеличении в 4 раза объема информации, передаваемой по MPI (256×256 для кривой 1 и 512×512 для кривой 2), время на передачу увеличивается почти во столько же раз при том же объеме вычислений (256×256×256=512×512×64).

Производительность программы сильно зависит от выбора размеров блоков в технологии CUDA [8], а также от использования новых возможностей графических процессоров “Fermi” (например, передача данных в рамках одного устройства посредством функции “cudaMemcpyPeer()”, использование разделяемой памяти мультипроцессоров в качестве кэш-памяти, организация обращений к глобальной памяти устройства с максимальной коалесценцией и т.п.). Заметим, что при прочих равных условиях производительность графических карт GTX 580 заметно выше, чем для Tesla M2090.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПАДА БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ В СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

В общем случае объемная сила, действующая на диэлектрическую, не содержащую свободных зарядов жидкость в электрическом поле, выражается формулой Гельмгольца [14]

$$\mathbf{F} = -\frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\nabla\left[E^2\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right].$$

Первое и второе слагаемые описывают действие электрического поля на поляризационные заряды в неоднородном диэлектрике и электрострикционные силы, соответственно.

В наших работах [1,2] теоретически и в двухмерных компьютерных экспериментах было обнаружено и исследовано новое ранее неизвестное явление – неустойчивость жидких диэлектриков в экстремальных электрических полях под действием сил электрострикции и последующий анизотропный распад на двухфазную систему нитевидных паровых каналов в жидкости, параллельных локальному вектору электрического поля. Такой распад для жидких диэлектриков с нелинейной зависимостью диэлектрической проницаемости от плотности $\varepsilon(\rho)$ происходит в первоначально однородном электрическом поле $E_z = E_0$ из-за сил электрострикции

$$F_x = \frac{E_0^2\rho}{8\pi}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2}\right)_T\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

$$F_y = \frac{E_0^2\rho}{8\pi}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2}\right)_T\frac{\partial\rho}{\partial y},$$

направленных перпендикулярно электрическому полю в сторону увеличения плотности, что может приводить к неустойчивости.

В данной работе проведено трехмерное моделирование этого эффекта. Разработан трехмерный вариант метода LBE для многокомпонентных сред, находящихся в электрическом поле, с возможностью фазового перехода жидкость-пар и с учетом зависимости взаимной растворимости компонентов от давления. Расчет электрического поля выполнялся с учетом изменения диэлектрической проницаемости бинарной среды во времени и в пространстве согласно уравнению для потенциала электрического поля

$$\mathrm{div}(\varepsilon\,\mathrm{grad}\varphi) = 0. \qquad (1)$$

Для расчетной области в форме параллелепипеда размерами L_x, L_y, L_z использовались периодические граничные условия по x и по y: $\varphi(0,y,z) = \varphi(L_x,y,z)$ и $\varphi(x,0,z) = \varphi(x,L_y,z)$. Значения потенциала на других гранях расчетной области задавались в виде $\varphi(x,y,0) = 0$ и $\varphi(x,y,L_z) = V$. При этом электрическое поле первоначально является однородным $E_z = E_0 = V/L_z$. На каждом шаге по времени уравнение (1) решалось методом простых итераций. Начальные значения потенциала брались с предыдущего шага по времени, что является хорошим приближением так, как плотность ρ а, следовательно, и ε слабо меняются за один шаг по времени.

Использовалась нелинейная зависимость диэлектрической проницаемости диэлектрика от плотности, характерная для неполярных жидких диэлектриков:

$$\varepsilon(\rho) = 1 + \frac{3\alpha\rho}{1-\alpha\rho}.$$

Уравнения эволюции для функций распределения каждого из компонентов и имеют вид

$$N_k^{s,\sigma}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k\Delta t, t+\Delta t) = N_k^{s,\sigma}(\mathbf{x},t) + \Omega_k^{s,\sigma} + \Delta N_k^{s,\sigma},$$

где $\Omega_k^{s,\sigma} = \dfrac{(N_k^{eq}(\rho^{s,\sigma},\mathbf{u}^{s,\sigma}) - N_k^{s,\sigma}(\mathbf{x},t))}{\tau}$ – оператор столкновений в виде релаксации к равновесному состоянию, а

$$\Delta N_k^{s,\sigma} = N_k^{eq}(\rho^{s,\sigma}, u^{s,\sigma} + \Delta\mathbf{u}^{s,\sigma}) - N_k^{eq}(\rho^{s,\sigma},\mathbf{u}^{s,\sigma})$$

– изменения функций распределения за счет действия объемных сил, в том числе и обеспечивающих фазовые переходы [5-8]. Здесь $\rho^s = \sum_k N_k^s$ и $\rho^\sigma = \sum_k N_k^\sigma$ – плотности вещества компонентов смеси, а $\mathbf{u}^s = \sum_k N_k^s\mathbf{c}_k/\rho^s$ и $\mathbf{u}^\sigma = \sum_k N_k^\sigma\mathbf{c}_k/\rho^\sigma$ – скорости компонентов в данном узле.

Ограниченная взаимная растворимость газа в жидкости моделировалась силами отталкивания, действующими в узле на вещество каждого компонента со стороны вещества другого компонента, присутствующего в соседних узлах . Суммарные силы, действующие на вещество компонентов в узле за счет этих сил отталкивания, имеют вид

$$\mathbf{F}^s(\mathbf{x}) = \psi[\rho^s(\mathbf{x})]\sum_k B_k\psi[\rho^\sigma(\mathbf{x}+\mathbf{e}_k)]\mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{F}^\sigma(\mathbf{x}) = \psi[\rho^\sigma(\mathbf{x})]\sum_k B_k\psi[\rho^s(\mathbf{x}+\mathbf{e}_k)]\mathbf{e}_k.$$

Все коэффициенты B_k выражаются через один параметр взаимодействия компонентов $B<0$, определяющий степень малости взаимной растворимости компонентов. Здесь $\psi(\rho)$ – возрастающая функция от плотности соответствующего компонента, вид которой определяет зависимость растворимости от давления.

Для жидкого диэлектрика использовалось уравнение состояния Ван-дер-Ваальса. Для растворенного газа использовалось обычное газовое уравнение состояния $\widetilde{P}=\widetilde{\rho}\widetilde{T}$.

Для трехмерных расчетов полной задачи (бинарная смесь с фазовым переходом и расчет потенциала электрического поля) на одном GPU типа GTX-580 удается использовать сетки размерами до 160×160×256. Расчет потенциала электрического поля в соответствии с уравнением (1) при использовании итерационного метода тоже легко распараллеливается на GPU.

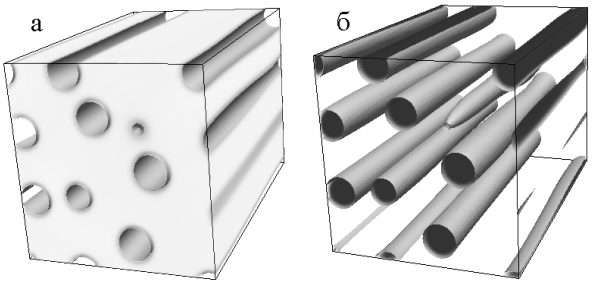

Рис.5 Распад бинарной смеси в трехмерном электрическом поле. (а) – жидкий диэлектрик, (б) – парогазовые полости. $\widetilde{T}=0.9$, $\widetilde{\rho}_0=1.66$, q=0.02, $\widetilde{A}=E_0^2(2\pi P_{кр})=30$, $t=6000$. Сетка 160×160×256.

На рис.5 показаны результаты трехмерного моделирования распада первоначально однородной бинарной смеси “жидкий диэлектрик – растворенный газ” на компоненты под действием сильного электрического поля. Начальное состояние флюида соответствовало состоянию жидкости на кривой насыщения при данной температуре. При любом случайном локальном возмущении пониженной плотности давление в этом месте уменьшается. При этом растворимость газа в жидком диэлектрике тоже уменьшалась, и происходило выделение газа, за счет чего еще более возрастал градиент плотности. Поэтому процесс выделения газа в виде парогазовых каналов, ориентированных преимущественно вдоль электрического поля, носил взрывной характер.

Парогазовые каналы расширяются как за счет диффузии растворенного газа из жидкости и испарения жидкого вещества внутрь каналов, так и за счет коалесценции каналов друг с другом.

Из экспериментальных работ по пробою жидких диэлектриков известно, что чем больше электрическое поле, тем больше каналов стримеров образуются в том же объеме диэлектрика. Этот эффект хорошо моделируется и в наших расчетах (рис.6). На первой стадии парогазовые каналы имеют форму близкую к цилиндрической. Иногда наблюдается разветвление каналов.

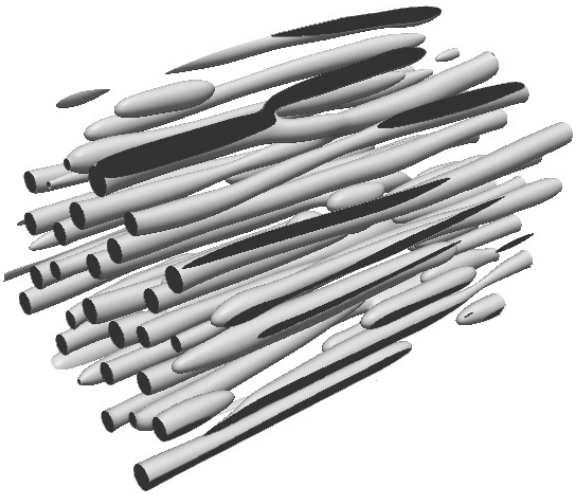

Рис.6 Распад бинарной смеси в трехмерном электрическом поле. Показаны образовавшиеся парогазовые полости. $\widetilde{T}=0.9$, $\widetilde{\rho}_0=1.66$, $\widetilde{A}=60$, $q=0.02$, Сетка 192×192×352. $t=1800$

На рис.7 показана зависимость безразмерной величины квадрата критической напряженности электрического поля, которая необходима для анизотропного распада бинарной системы жидкий диэлектрик – растворенный газ на компоненты, от начальной концентрации растворенного газа при разных температурах.

Начальные состояния бинарной смеси при каждой температуре соответствуют состояниям жидкости на кривой насыщения: $\widetilde{\rho}_0=$ 2.14 при $\widetilde{T}=0.7$, $\widetilde{\rho}_0=1.93$ при $\widetilde{T}=0.8$, $\widetilde{\rho}_0=1.66$ при $\widetilde{T}=0.9$. Критическая напряженность однородного электрического поля значительно уменьшается при увеличении начальной концентрации растворенного газа примерно линейно для модели $\psi(\rho)=\rho$. Кроме того, чем ближе состо-

яние смеси к критической точке, тем меньше электрическое поле, необходимое для разделения бинарной смеси на компоненты.

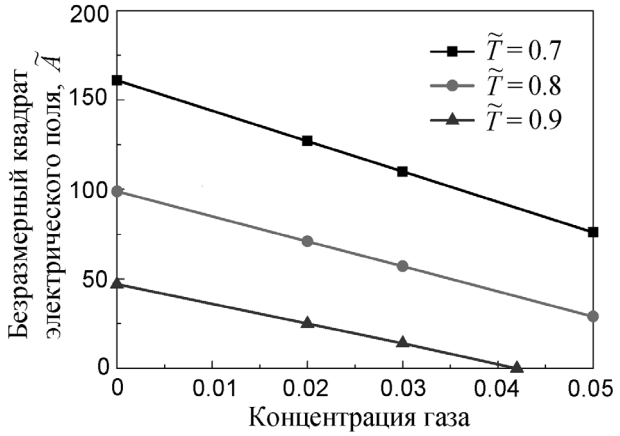

Рис.7 Зависимость безразмерной величины квадрата критического электрического поля от начальной концентрации растворенного газа q. Параметр взаимодействия компонент B=–0.02.

Таким образом, при учете влияния растворенных газов значения электрических полей, при которых возможен механизм развития и роста каналов стримеров в жидких диэлектриках путем анизотропного распада, значительно уменьшаются по сравнению с гомогенными диэлектриками.

После выключения электрического поля эти каналы распадаются на систему парогазовых пузырьков (рис.8).

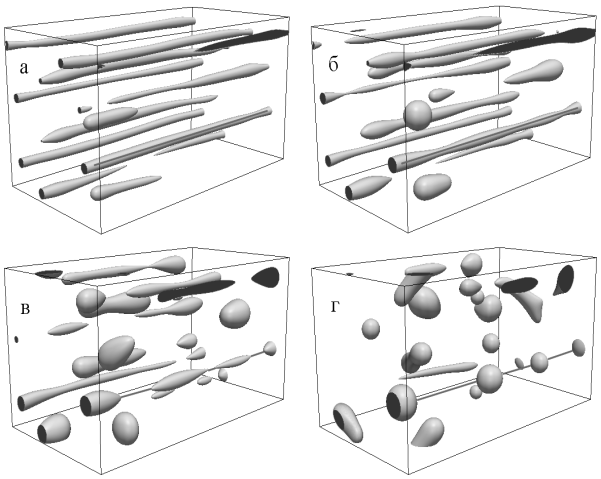

Рис.8 Распад парогазовых каналов после выключения поля. Показаны парогазовые полости. $\tilde{T}=0.9$, $\tilde{\rho}_0=1.66$, $\tilde{A}=30$, $q=0.02$, Сетка 192×192×352. t=5600 (а); 6600 (б); 7600 (в); 9000 (г).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование гибридных GPU-кластеров позволило выйти на принципиально новый уровень моделирования мультифизических задач. Были проведены трехмерные расчеты распада бинарных смесей жидкого диэлектрика и растворенного газа в сильних электрических полях на сетках до 250 миллионов узлов. Показано, что критическая напряженность однородного электрического поля значительно уменьшается при увеличении концентрации растворенного газа примерно линейно для модели $\psi(\rho)=\rho$. Это указывает на то, что в наносекундном диапазоне пробоя реальных жидких диэлектриков возможен механизм зарождения, роста и ветвления каналов стримеров путем анизотропного (электрострикционного) распада жидкого диэлектрика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kupershtokh A. L., Medvedev D. A. Anisotropic instability of a dielectric liquid in a strong uniform electric field: Decay into a two-phase system of vapor filaments in a liquid // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74, N 2. P. 021505.
2. Карпов Д. И., Куперштох А. Л. Анизотропный спинодальный распад полярного диэлектрика в сильном электрическом поле: метод молекулярной динамики // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 10. С. 87–94.
3. An W., Baumung K., Bluhm H. Underwater streamer propagation analyzed from detailed measurements of pressure release

// J. Appl. Phys. 2007. Vol. 101, N 5. P. 053302.
4. Kupershtokh A. L., Karpov D. I. Simulation of ultra-fast streamer growth governed by the mechanism of anisotropic decay of a dielectric liquid into a liquid-vapor system in high electric fields // Proc. 5th Conf. SFE, Grenoble, France. 2006. P. 179–184.
5. Куперштох А. Л. Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана // Вестник НГУ: Серия "Математика, механика и информатика". 2005. Т. 5, № 3. С. 29–42.
6. Kupershtokh A. L., Medvedev D. A., Karpov D. I. On equations of state in a lattice Boltzmann method // Computers and Mathematics with Applications, 2009. Vol. 58, N 5. P. 965–974.
7. Kupershtokh A. L. Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // Computers and Mathematics with Applications. 2010. Vol. 59, N 7. P. 2236–2245.
8. Куперштох А. Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. С. 130–138.
9. Qian Y. H., Orzag S. A. Lattice BGK models for the Navier – Stokes equation: Nonlinear deviation in compressible regimes // Europhys. Lett. 1993. Vol. 21. P. 255–259.
10. Qian Y. H., Chen S. Finite size effect in lattice-BGK models // International Journal of Modern Physics C. 1997. Vol. 8, N 4. P. 763–771.
11. Kupershtokh A. L., Karpov D. I., Medvedev D. A., Stamatelatos C., Charalambakos V. P., Pyrgioti E. C., Agoris D. P. Stochastic models of partial discharge activity in solid and liquid dielectrics // IET Sci. Meas. Technol., 2007, Vol. 1, N 6. pp. 303–311.
12. Kupershtokh A. L. New method of incorporating a body force term into the lattice Boltzmann equation // Proc. of the 5th International EHD Workshop, Poitiers, France, 2004, pp. 241–246.
13. Куперштох А. Л. Учет действия объемных сил в решеточных уравнениях Больцмана // Вестник НГУ: Серия "Математика, механика и информатика". 2004. Т. 4, № 2. С. 75–96.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Гос. изд-во. физ.-мат. литературы. 1959. – 532 с.

© Куперштох А.Л.