УДК 301.17.15, 532.55,551.465

КОМПАКТНЫЕ ВИНТОВЫЕ ВИХРИ И ВИХРИ С ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Лукьянов П.В.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина

АННОТАЦИЯ

В работе приведен ряд моделей, описывающих часто встречающиеся в природе и технических устройствах течения в виде винтовых вихрей и вихревые течения с винтовой симметрией. Основной объединяющей идеей есть условие компенсированности поля завихренности [1], гарантирующее конечный размер течения в радиальном направлении. Основанные на приведенных моделях, течения имеют конечную кинетическую энергию, в отличие от известных решений.

ВВЕДЕНИЕ

Какая бы задача ни рассматривалась, – стационарная или нестационарная, – нельзя в реальных условиях, то есть за конечное время при конечной мощности генератора вихря, создать течение жидкости с бесконечной кинетической энергией. Цель данной работы – с единой точки зрения, основанной на условии компенсированности поля завихренности, представить ряд простых моделей вихревых течений, указанных в названии, для областей конечных и бесконечных размеров.

Обзор существовавших до недавних пор моделей винтовых вихрей и течений с винтовой симметрией приведен в [2]. Согласно этим моделям, в случае бесконечной области, все без исключения течения имеют бесконечную кинетическую энергию. За последние пару лет автору удалось разработать ряд моделей компактных вихревых течений, лишенных указанного существенного недостатка [3,4,5,6]. Их обзор и дальнейшее развитие этих моделей, для вихревых течений с винтовой симметрией, приводятся в данной работе.

КОМПАКТНЫЕ ВИНТОВЫЕ ВИХРИ

КОМПАКТНЫЙ КОМПЕНСИРОВАННЫЙ ВИНТОВОЙ ВИХРЬ

Уравнения неоднородного винтового потока в цилиндрической системе координат в предположении, что течение зависит лишь от радиальной координаты , упростятся до [2, 7]:

$$-\frac{\partial V_z}{\partial r}=\lambda V_\theta,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}=\lambda V_z. \tag{1}$$

Исключая λ из (1), получаем:

$$-\frac{\partial V_z^2}{2\partial r}=V_\theta\omega_z \tag{2}$$

В [2] приведены три различные модели одномерных винтовых вихря. Вертикальная компонента завихренности у них задается константой, дробно-степенной функцией и Гауссовским распределением. Указанные модели не описывают компактные течения: поле окружной скорости в них имеет одну и ту же асимптоту – потенциальное вращение по закону $1/r$, которое не является компактным.

Рассмотрим компактный винтовой вихрь. Поле окружной скорости в таком вихре представляется компактным компенсированным вихрем:

$$V_\theta=\begin{cases}\dfrac{V_0}{a}r, & 0\le r\le a,\\ \dfrac{V_0 a\left(R^2-r^2\right)}{\left(R^2-a^2\right)r}, & a\le r\le R.\end{cases} \tag{3}$$

© Лукьянов П.В.

Поэтому правая часть уравнения (2) представляется в виде:

$$V_\theta \omega_z = \begin{cases} 2\left(\dfrac{V_0 r}{a}\right)^2 r, & 0 \le r \le a; \\ -\dfrac{V_0^2 a^2}{r}\left(\dfrac{R^2 - r^2}{R^2 - a^2}\right), & a \le r \le R. \end{cases} \quad (4)$$

Продольная компонента скорости, с учетом ее значения на оси, находится по формуле:

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} - \int_0^r V_\theta \omega_z dr \quad (5)$$

Подставляя выражение (4) в (5), получаем:
1. для области $0 \le r \le a$:

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} - \int_0^r 2\left(\frac{V_0}{a}\right) r dr = \frac{V_0^2}{2} - V^2\left(\frac{r}{a}\right)^2.$$

2. для области $a \le r \le R$:

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} - V_0^2 + \left(R^2 \ln\frac{r}{a} - \frac{1}{2}\left(r^2 - a^2\right)\right)$$

Условие непрерывности поля скорости V_z при $r = a$ удовлетворяется лишь при равенстве нулю константы интегрирования в последнем выражении.

Поле возмущения давления, генерируемое вихрем, определяется из соотношения [2]:

$$p = p_\infty + \rho \int_\infty^r \frac{V_\theta^2}{r} dr. \quad (6)$$

Из (6) следует основной вывод: если поле азимутальной скорости компактно, то и радиального градиента давления – также. Поэтому, изнутри вихря нет силы, которая бы увеличивала его радиальный размер.

Явное выражение для безразмерного возмущения поля давления $\Delta p = (p - p_\infty)/p_\infty$ имеет вид:

$$\Delta p = \begin{cases} D\left[R^4\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{a}\right) - 2R^2(a - R) + \dfrac{1}{3}\left(a^3 - R^3\right)\right] + \\ + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{V_0}{a}\right)^2\left(r^3 - a^3\right), \quad 0 \le r \le a; \\ D\left[R^4\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{a}\right) - 2R^2(a - R) + \dfrac{1}{3}\left(a^3 - R^3\right)\right], \\ a \le r \le R. \end{cases}$$

где $D = (V_0 a)^2 / \left(R^2 - a^2\right)^2$.

На рис.1 представлены полученные зависимости для продольной компоненты скорости и возмущения давления.

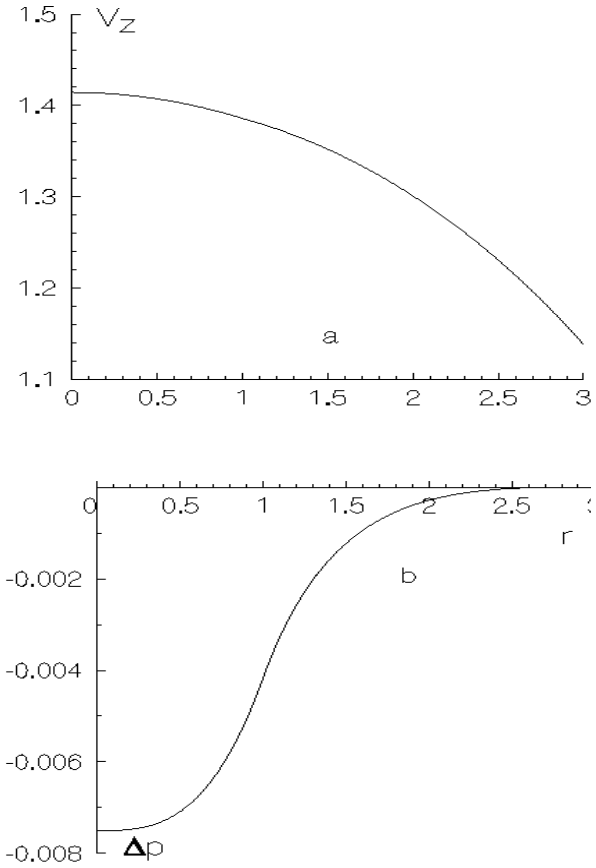

Рис.1 Продольная компонента скорости (a) и возмущение давления (b).

КОМПАКТНЫЙ КОЛЬЦЕВОЙ ВИНТОВОЙ ВИХРЬ

Предпочтение имеет модель, основанная на кольцевом компактном вихре, в которой поля скорости и завихренности представляются в виде [4]:

$$V_\theta = \begin{cases} \dfrac{\Omega_0\left(r^2 - r_0^2\right)}{2r}, & r_0 \le r \le r_0 + a, \\ \dfrac{\Omega_0\left((r_0 + a)^2 - r_0^2\right)}{(r_0 + R)^2 - (r_0 + a)^2}\dfrac{(r_0 + R)^2 - r^2}{2r}, & \\ r_0 + a \le r_0 + R. \end{cases} \quad (7)$$

$$\omega_z = \begin{cases} \Omega_0, & r_0 \le r \le r_0 + a, \\ -\dfrac{\Omega_0\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)}{(r_0+R)^2 - (r_0+a)^2}, & r_0 + a \le r \le r_0 + R. \end{cases}$$

Вновь ищем произведение $V_\theta \omega_z$ и, после интегрирования, получаем:

$$V_z^2 = \begin{cases} \dfrac{V_{z0}^2}{2} - \Omega_0^2\left(-\dfrac{r_0^2}{2}\ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) + \dfrac{1}{4}\left(r^2 - r_0^2\right)\right), \\ r_0 \le r \le r_0 + a; \\ \dfrac{V_{z0}^2}{2} - \Omega_0^2\left(-\dfrac{r_0^2}{2}\ln\left(\dfrac{r_0+a}{r_0}\right) + \dfrac{1}{4}\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)\right) + \\ + B\left(\dfrac{(r_0+R)^2}{2}\ln\left(\dfrac{r}{r_0+a}\right) + \left((r_0+a)^2 - r^2\right)\right), \\ r_0 + a \le r \le r_0 + R. \end{cases}$$

Важно отметить, что поле продольной скорости также может быть компактным, если от V_z вычесть ее значение на границе вихря.

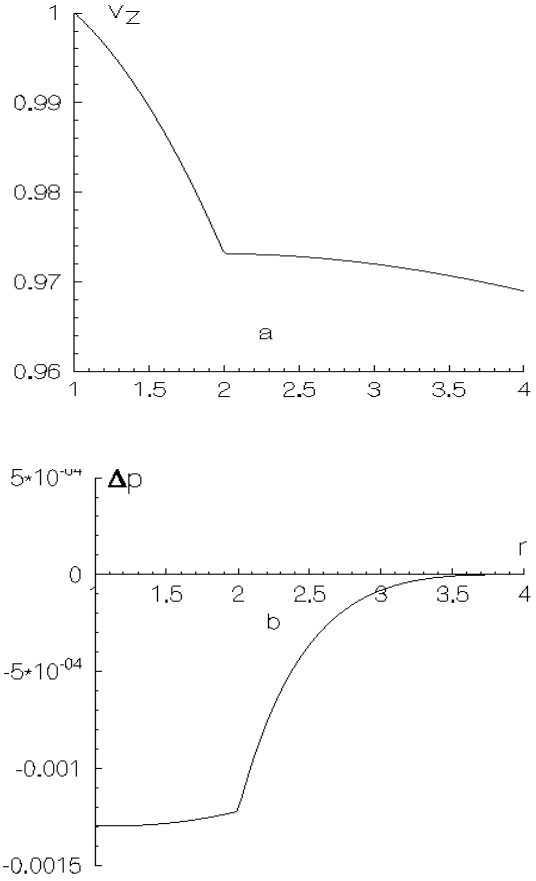

Рис.2 Продольная компонента скорости (a) и возмущение давления (b).

КОМПАКТНЫЙ ВИНТОВОЙ ВИХРЬ С ТРЕМЯ ОБЛАСТЯМИ ЗАВИХРЕННОСТИ

Распределение окружной компоненты скорости в данном случае имеет вид:

$$V_\theta = \begin{cases} \dfrac{\Omega_0^2 r}{2}, & 0 \le r \le a, \\ -\dfrac{(\Omega_0 - \Omega_1)\Omega_1 a^2}{2r} + \dfrac{\Omega_1^2 r}{2}, & a \le r \le R_1, \\ -B\dfrac{(\Omega_0 - \Omega_1)a^2}{2r} + \dfrac{\Omega_1^2 R_1^2}{2r} + \\ + B\dfrac{\left[\Omega_0 a^2 + \Omega_1\left(R_1^2 - a^2\right)\right]\left(r^2 - R_1^2\right)}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)2r}, \\ R_1 \le r \le R_2. \end{cases}$$

С учётом граничного условия на оси и непрерывности, находим .

1) $0 \le r \le a$:

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_{z0}^2}{2} - \frac{\Omega_0^2 r^2}{4}.$$

2) $a \le r \le R_1$:

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_{z0}^2}{2} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_0^2}{4}a^2 - \frac{(\Omega_0 - \Omega_1)\omega_1 a^2}{2}\ln$$

$$-\frac{\Omega_1^2 r^2}{4};$$

3) $R_1 \le r \le R_2$:

$$\frac{V_z^2}{2} = \frac{V_{z0}^2}{2} + \frac{(\Omega_0 - \Omega_1)a^2}{2} -$$

$$-\frac{(\Omega_0 - \Omega_1)a^2}{2}\ln\left(\frac{R_1}{a}\right) + \frac{\Omega_1^2 R_1^2}{2}$$

$$-B\left[\frac{(\Omega_0 - \Omega_1)a^2}{2} + \frac{\Omega_1^2 R_1^2}{2}\right]\ln\left(\frac{r}{R}\right) +$$

$$+B\left[\frac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1\left(R_1^2 - a^2\right)}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{4} - \frac{R_1^2}{2}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)\right].$$

На границе вихря при $r = R_2$:

$$\frac{V_{zR2}^2}{2} = \frac{V_{z0}^2}{2} + \frac{(\Omega_0 - \Omega_1)\omega_1 a^2}{2}\ln\left(\frac{R_1}{a}\right) + \frac{\Omega_1^2 R_1^2}{4} -$$

$$-B\left[\frac{(\Omega_0 - \Omega_1)a^2}{2}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\Omega_1^2 R_1^2}{2}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right] +$$

$$+B\left[\frac{\Omega_0 a^2+\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)}{\left(R_2^2-R_1^2\right)}\left(\frac{R_2^2-R_1^2}{4}-\frac{R_1^2}{2}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)\right].$$

Если вновь вычесть от всего выражения для продольной скорости её значение на границе то такое поле будет уже компактным. Обозначим:

$$C=\frac{a^2\left(\Omega_0-\Omega_1\right)}{2}+\frac{R_1^2\left(\Omega_0 a^2+\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)\right)}{2\left(R_2^2-R_1^2\right)},$$

$$D=-\frac{\Omega_0 a^2+\Omega_1\left(R_1^2-a^2\right)}{2\left(R_2^2-R_1^2\right)}.$$

Поле возмущения давления определяется как прежде.

1) $R_1\le r\le R_2$:

$$p_1=\frac{C^2}{2}\left[\frac{1}{R_2^2}-\frac{1}{r^2}\right]+2CD\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)+\frac{D^2}{2}\left(r^2-R_2^2\right),$$

2) $a\le r\le R_1$:

$$p_2=p_1(r=R_1)-\frac{5}{8}a^4\left(\Omega_0-\Omega_1\right)\ln\left(\frac{r}{R_1}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\Omega_1^2\left(r^2-R_1^2\right),$$

3) $0\le r\le a$:

$$p_3=p_2(r=a)+0.125\,\Omega_0^2\left(r^2-a^2\right).$$

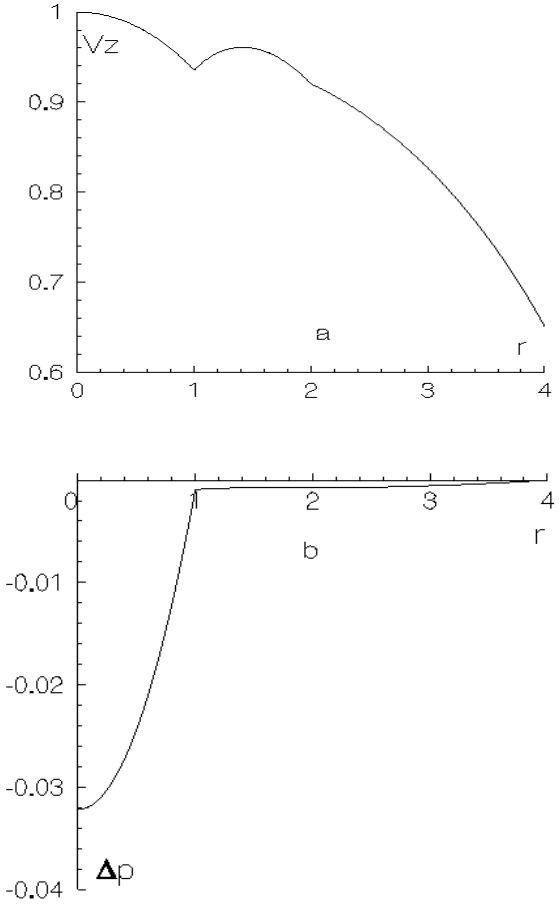

Рис.3 Продольная компонента скорости (a) и возмущение давления (b).

МОДЕЛИ КОМПАКТНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

В природе существует и другой вид течений – с винтовой симметрией [2, 8, 9, 10]. Ниже приводятся некоторые модели, описывающие такие течения. В случае осесиммтеричных задач используем следующее соотношение [2]:

$$V_z=V_0-\frac{r}{l}V_\theta. \qquad (9)$$

Поскольку в (9) азимутальна скорость произвольна, можно рассмотреть ряд моделей, основанных на приведенных ранее компактных вихревых течениях.

Модель 1. На основе изолированного Гауссиана.

Если не принимать во внимание нестационарный характер автомодельных решений, описывающих ламинарную и турбулентную диффузию вихря, можно в качестве начального приближения поля азимутальной компоненты скорости использовать соответствующие решения в виде изолированного Гауссинана

$$V_z=\frac{r}{2}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \qquad (10)$$

Поле продольной скорости, согласно (10), имеет следующий вид:

$$V_z=-\frac{r^2}{2l}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \qquad (11)$$

Функция (11) компактна по Сэффмену [11] (см. рис. 4, кривая II) и ее можно использовать в тех задачах, где на оси $r=0$ отсутствует движение вообще (условие прилипания), то есть при наличии внутренней границы нулевого радиуса (натянута проволока, или очень тонкий цилиндр).

Модель 2. Другая простая модель описывает течение, у которого азимутальная скорость имеет вид квазиточечного вихря [6]. Радиальное распределение продольной скорости суть:

$$V_z = V_z^0 - \frac{\Gamma}{2\pi l}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (12)$$

В отличие от предыдущей модели, на оси вихря азимутальная скорость имеет особенность, как в точечном вихре. Первое слагаемое в (12) равно нулю на основании условия компактности: вне радиуса R течение отсутствует вообще. На оси вращения продольная скорость имеет постоянное значение:

$$V_z(r=0) = -\frac{\Gamma}{2\pi l}. \qquad (13)$$

Выражение (12) отчетливо указывает на то, что знак продольной скорости на оси противоположен знаку азимутальной скорости. Следовательно, в зависимости от направления вращения, течение вдоль оси будет различным. На рис.4, кривая I, представлено распредение продольной скорости такого течения.

Выражение (12) совпадает с известным решением для распредления (продольной) скорости течения жидкости в трубе. Таким образом, полученное на основе модели квазиточечного вихревого вращения, течение с винтовой симметрией может вполне соответствовать, например, вертикальному стоку в трубе, где радиальная скорость равна нулю, а азимутальная имеет особенность на оси вращения.

Модель 3. Она основана на компактном компенсированном вихре, (см. формулу (3)). Соответственно нему, продольная компонента скорости представляется:

$$V_z = \begin{cases} V_z^0 - \dfrac{V_0 r^2}{al}, & 0 \le r \le a; \\ V_z^0 - \dfrac{V_0 a\left(R^2 - r^2\right)}{R^2}, & a \le r \le R. \end{cases} \qquad (14)$$

Представленное решение можно использовать для задач, где на границе ($r = R$) продольная скорость равна нулю, поскольку все пространство не может двигаться с ненулевой скоростью. А для этого на оси вращения продольная компонента должна быть равна нулю. Как в первой модели.

Модель 4. На основе полого (кольцевого) компактного компенсированного вихря.

Во многих течениях поле азимутальной скорости и завихренности можно аппроксимировать полым компактным компенсированным вихрем (7).

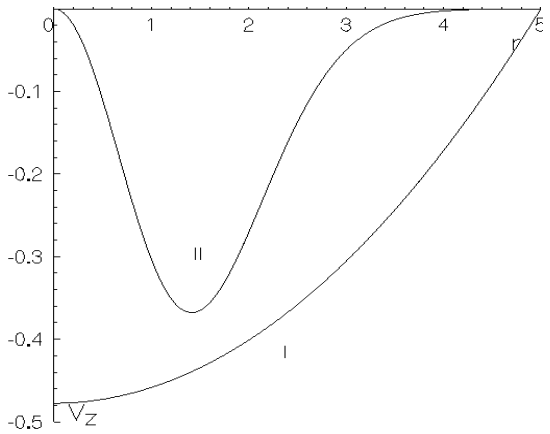

Рис.4 Распределения продольной скорости.

Соответствующее выражение для поля продольной скорости имеет вид:

$$V_z = \begin{cases} -\dfrac{\Omega_0\left(r^2 - r_0^2\right)}{2l}, & r_0 \le r \le r_0 + a \\ -\dfrac{\Omega_0\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)}{2l} + \\ \dfrac{\Omega_0}{2l}\dfrac{\left((r_0+a)^2 - r_0^2\right)\left(r^2 - (r_0+a)^2\right)}{(r_0+R)^2 - (r_0+a)^2} = 0, \\ r_0 + a \le r \le r_0 + R. \end{cases},$$

Модель 5. На основе компактного компенсированного вихря с противотечением.

Наконец, рассмотрим модель, у которой поле азимутальной скорости описывается соотношениями (8). Соответствующие выражения для поля продольной компоненты скорости суть:

$$V_z = \begin{cases} -\dfrac{\Omega r^2}{l}, & 0 \le r \le a, \\ -\dfrac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 r^2 + \Omega_1\left(r^2 - a^2\right)}{2l}, & a \le r \le R_1, \\ -\dfrac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1\left(R_1^2 - a^2\right)}{2l} + \\ +\dfrac{\left[\Omega_0 a^2 + \Omega_1\left(R_1^2 - a^2\right)\right]\left(r^2 - R_1^2\right)}{2l\left(R_2^2 - R_1^2\right)}, \\ R_1 \le r \le R_2. \end{cases}$$

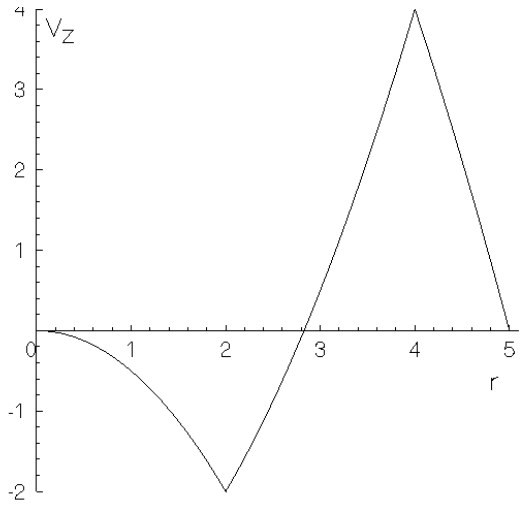

Рис.5 Профиль продольной скорости с противотечением.

На рис.5 представлено это распределение продольной скорости. Видно, что внутренняя и внешняя области находятся в противотечении. На внешней границе обе компоненты скорости равны нулю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Приведенные модели вихревых течений основаны на выполнении условия компенсированности поля завихренности. Оно гарантирует в любой момент времени компактность поля азимутальной скорости, что, в свою очередь, позволяет быть таковым распределению продольной скорости. Эти модели являются альтернативой существующим. Самым веским аргументом для их использования является конечность кинетической энергии. Любой вихрь образуется за конечное время и, поскольку мошность какого бы то нибыло источника конечна, обязательно должен иметь конечную энергию. В настоящее время автором рассматривается расширение моделей на класс турбулентных течений с указанными в заглавии свойствами.

• При компактном поле скорости поле возмущений давления также компактно.

• Во всех приведенных моделях, где поле азимутальной скорости есть суперпозиция $C_1 r^{-1} + C_2 r$, диффузия поля скорости отсутствует, так как молекулярная вязкость не воздействует на такой класс течений. Диффузия же продольной скорости, в силу ее независимости от продольной координаты, также отсутствует. Следовательно, указанные модели описывают когерентные (долгоживующие, практически не подверженные диффузии) вихревые поля.

• Разнообразие перечисленных моделей позволяет использовать их во многих задачах гидромеханики благодаря их простоте, с одной стороны, и как пробные (начальные) данные для численного решения задач на установление в более сложных течениях с другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов В.Ф. Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей // Изв. РАН,ФАО. -- 1992. --28, № 6. -- С. 615--624.
2. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. -- Новосибирск: Институт теплофизики СО АН, 2003. -- 503 С.
3. Лук'янов П.В. Одновимірні моделі компактних вихрів // Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2010 – Т. 4 (72). – №4. – С. 145–150.
4. Лукьянов П.В. Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа // Прикл. гідромех. – 2011. -- т. 13 (85). – №2. – С. 37–43.

5. Лукьянов П.В. Компактные винтовые вихри // Прикл. гідромех. – 2011. -- т. 13 (85). – №3. – С. 61–68.
6. Лук'янов П.В.Модель квазіточкового вихору // Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2011 – Т. 4 (78). – №4. – С. 139–142.
7. Васильев О.Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958, –144 С.
8. Park, W., Monticello, D.A. & White, R.B. Reconnection of magnetic fields including the effects of viscosity // Phys. Fluids. – 1984 ¬ 27, – P. 137–149.
9. Landman, M.J. 1990 On the generation of helical waves in circular pipe flow. // Phys. Fluids – 1990 – A2, – P. 738–747.
10. David G. Dritschel. Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics. //J. Fluid. Mech. – 1991– vol. 222 . P 525–541.
11. Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. – М.: Наука, 2000. -- 402 С.

© Лукьянов П.В.