УДК 536. 24.01

ВОЛНЫ В СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

Актершев С.П., Алексеенко С.В.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12 01 00360-а), гранта Президента НШ-6686.2012.8.

АННОТАЦИЯ

Для описания длинноволновых возмущений в стекающей пленке вязкой жидкости разработана новая модель. Модель основана на интегральном подходе и разложении скорости в ряд по системе линейно независимых базисных функций (гармоник), удовлетворяющих краевым условиям задачи. Проведен линейный анализ устойчивости и расчеты волновых режимов течения пленки. Результаты расчетов по новой модели хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

ВВЕДЕНИЕ

Стекающие пленки вязкой жидкости представляют собой пример среды с диссипацией и подкачкой энергии, поэтому волны в пленках занимают особое место в теории нелинейных волн. Специфика состоит в том, что на поверхности тонкой пленки развиваются, в основном, длинные волны, и для чисел Рейнольдса порядка 100 течение остаются ламинарным. Даже в случае сильно нелинейных волн, амплитуда которых порядка толщины пленки, в задаче имеется малый параметр отношение толщины пленки к длине волны. Это позволяет построить упрощенные модели, адекватно описывающие нелинейные волны в тонких пленках. Теоретический подход к исследованию волн в пленках, предложенный в пионерской работе Капицы [1], был использован Шкадовым в работе [2], в которой выведены уточненные модельные уравнения для расхода и толщины пленки. Модель [2] основана на пограничном приближении и параболическом профиле скорости. При умеренных числах Рейнольдса модель [2] хорошо описывает количественные характеристики волн, хотя для критического числа Рейнольдса пленки, стекающей по наклонной плоскости под углом θ к горизонту, она дает значение $ctg\theta$ вместо $(5/6)ctg\theta$. Это завышение примерно на 20% не имеет значения в случае вертикальной пленки.

Проблемы интенсификации процессов тепломассопереноса потребовали дальнейшего усовершенствования и обобщения развитого в [1-2] подхода, что привело к появлению в последнее десятилетие новых моделей, описывающих волны в пленке. Так, в работе [3] посредством метода весовых остатков в сочетании с разложением по малому параметру $\varepsilon_h = \partial h / \partial x$ выведена система модельных уравнений. Метод весовых остатков использует разложение скорости по системе тестовых функций, в качестве которых берутся полиномы от безразмерной координаты $\eta = y / h$. Модель первого порядка по ε_h, использующая полиномы до 6 степени и пограничное приближение, сводится к двум дифференциальным уравнениям для расхода и толщины пленки. Модель второго порядка использует полиномы до 14 степени и представляется системой четырех уравнений, каждое из которых состоит из двух десятков членов. Хотя в упрощенном варианте модель второго порядка сводится к двум уравнениям, она уже не использует пограничного приближения и требует учета в граничных условиях нелинейных членов. Изложенная в [3] стратегия построения моделей волнового пленочного течения на основе полиномиального разложения скорости представляется малоперспективной по следующей причине. С увеличе-

© Актершев С.П., Алексеенко С.В.

нием степени полиномов происходит резкое увеличение числа уравнений, а сами уравнения становятся очень громоздкими. Исчезает ценное качество упрощенной модели – простота и возможность аналитического исследования. Теряется преимущество упрощенной модели по сравнению с численным решением уравнений Навье-Стокса.

В настоящей работе представлена новая модель волнового течения пленки, основанная на интегральном подходе и разложении скорости в ряд по системе базисных функций (гармоник), удовлетворяющих граничным условиям на свободной поверхности и на стенке. В представленной модели, в отличие от [2], не используется автомодельность профиля скорости.

УРАВНЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ

Рассмотрим двумерное течение пленки вязкой жидкости на плоской подложке, наклоненной под углом θ к горизонту. Введем декартову систему координат с осью Ox в направлении гравитации и осью Oy по нормали к подложке. Возмущение поверхности пленки считаем длинноволновым (отношение толщины пленки к длине волны много меньше единицы) и используем погранслойное приближение, полагая $\partial h/\partial x < 1$, $\partial^2/\partial x^2 << \partial^2/\partial y^2$. В первом приближении по параметру $\varepsilon = h/\lambda$ (здесь λ длина волны) в рамках интегрального подхода течение жидкости описывается системой двух уравнений:

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u^2 dy = \\ = gh\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

Здесь $q=\int_0^h u dy$ – расход, $\int_0^h u^2 dy$ – поток импульса, h толщина пленки. Для того, чтобы система уравнений (1), (2) стала замкнутой относительно q и h, необходимо задать профиль скорости u(x,y,t), Так, в предположении параболического профиля $u/u_s = 2\eta-\eta^2$ (здесь $\eta = y/h$, u_s скорость на поверхности) получается модель [2], в которой уравнение импульса имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t}+1{,}2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{h}\right) = \\ = gh\left(\sin\theta-\frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta+\frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)-\frac{3\nu q}{h^2} \qquad (3)$$

РАЗЛОЖЕНИЕ СКОРОСТИ В РЯД ПО БАЗИСНЫМ ФУНКЦИЯМ

На интервале $0<\eta<1$ рассмотрим следующие линейно независимые базисные функции (гармоники) $f_j(\eta)=\sin\omega_j\eta$, где $\omega_j=(2j-1)\pi/2$, $j=1,2,3\ldots..$ Гармоники $f_j(\eta)$ удовлетворяют краевым условиям $f_j(0)=df_j/d\eta\big|_{\eta=1}=0$ и ортогональны друг другу, т.е. $\int_0 f_j f_i d\eta = \delta_{ij}/2$, , где δ_{ij} символ Кронекера. Представим скорость жидкости в виде разложения в ряд по гармоникам:

$$u=\sum_{j=1}^{\infty} a_j(x,t) f_j(\eta) \qquad (4)$$

Тем самым профиль скорости (4) удовлетворяет граничным условиям $u\big|_{y=0}=0$, $\partial u/\partial y\big|_{y=h}=0$. Исходя из (4), расход также можно разложить в ряд:

$$q=h\sum_{j=1}^{\infty} a_j\int_0^1 \sin\omega_j\eta d\eta=\sum_{j=1}^{\infty} q_j \,. \qquad (5)$$

Здесь $q_j(x,t)=ha_j(x,t)/\omega_j$ вклад j-ой гармоники в общий расход. Представим также разложением в ряд поток импульса:

$$\int_0^h u^2 dy = h\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\int_0^1 f_j^2 d\eta=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega_j^2 q_j^2}{2h}, \qquad (6)$$

касательное напряжение на стенке:

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu\omega_j^2 q_j}{h^2}, \qquad (7)$$

и слагаемые в скобках в правой части (1):

$$gh\left(\sin\theta-\frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta+\frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) = \\ =\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2gh}{\omega_j^2}\left(\sin\theta-\frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta+\frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right). \qquad (8)$$

Здесь использовано тождество $1=\sum_{j=1}^{\infty} 2/\omega_j^2$.

Подставляя (5)-(8) в (1), запишем уравнение импульса в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\partial q_j}{\partial t}+\frac{\omega_j^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_j^2}{h}\right)\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2gh}{\omega_j^2}\left(\sin\theta-\frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta+\frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)-\frac{\nu\omega_j^2 q_j}{h^2}\right)$$

Вследствие линейной независимости гармоник каждый член ряда в левой части этого уравнения равен члену ряда в правой части. Таким образом, для $q_j(x,t)$ имеем цепочку уравнений:

$$\frac{\partial q_j}{\partial t}+\frac{\omega_j^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_j^2}{h}\right)=$$
$$=\frac{2gh}{\omega_j^2}\left(\sin\theta-\frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta+\frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)-\frac{\nu\omega_j^2 q_j}{h^2} \quad (9)$$

Уравнение (2) при этом принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial q_j}{\partial x}=0\,. \quad (10)$$

Все уравнения (9) имеют такую же структуру, как уравнение импульса (3) в модели [2], но отличаются от него численными коэффициентами. Отметим, что в нашей модели профиль скорости зависит от x и t. Таким образом, данная модель, в некотором роде является обобщением модели [2], но, в отличие от нее, обладает большей «степенью свободы» для профиля скорости.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ

Выберем в качестве масштаба расстояния толщину невозмущенной пленки h_0 и введем масштабы скорости $u_m=gh_0^2/3\nu$, времени $t_m=h_0/u_m$, расхода $q_m=gh_0^3/3\nu$. Перейдем к безразмерным переменным x/h_0, h/h_0, q_j/q_m, t/t_m, сохранив прежние буквенные обозначения. В безразмерных переменных уравнения (9), (10) имеют вид:

$$\frac{\partial q_j}{\partial t}+\frac{\omega_j^2}{2}\frac{\partial\left(q_j^2/h\right)}{\partial x}=\frac{3}{\mathrm{Re}_m}\left(\frac{2h}{\omega_j^2}\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\omega_j^2 q_j}{3h^2}\right)+$$
$$+\frac{2hWe}{\omega_j^2}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3},\quad j=1,2,3\ldots$$
$$\frac{\partial h}{\partial t}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial q_j}{\partial x}=0\,. \quad (11)$$

Здесь $We=\left(3Fi/\mathrm{Re}_m^5\right)^{1/3}$ – число Вебера, критерий $\mathrm{Re}_m=gh_0^3/3\nu^2$ связан с числом Рейнольдса пленки Re соотношением $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_m\sin\theta$. Невозмущенному течению соответствует тривиальное решение $h=1$, $q_{0j}=6\sin\theta/\omega_j^4$. Для анализа устойчивости течения положим $h=1+H$, $q_j=6\sin\theta/\omega_j^4+Q_j$, где $H=H_a\exp(ik(x-ct)+\beta t)$ и $Q_j=Q_{ja}\exp(ik(x-ct)+\beta t)$ – малые возмущения в форме бегущей волны, k, c, β – вещественные волновое число, фазовая скорость, временной инкремент волны. Подставляя это в систему (11) и линеаризуя уравнения относительно малых амплитуд H_a, Q_{ja}, получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{\beta}{ik}-c+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_j^4}\left(\frac{9\sin\theta+ikD_j\,\mathrm{Re}_m}{1+\dfrac{\beta\,\mathrm{Re}_m+ik\left(E_j-c\right)\mathrm{Re}_m}{\omega_j^2}}\right)=0\,. \quad (12)$$

Здесь $E_j=\dfrac{6\sin\theta}{\omega_j^2}$, $D_j=\dfrac{9\sin^2\theta}{\omega_j^4}-\left(\dfrac{3\cos\theta}{\mathrm{Re}_m}+Wek^2\right)$.

В асимптотике $k\mathrm{Re}_m\ll 1$ дисперсионное уравнение принимает вид

$$\beta-ikc+ik\sum_{j=1}^{\infty}\left(A_j+ik\,\mathrm{Re}_m B_j\right)=0\,. \quad (13)$$

Здесь $B_j=2D_j/\omega_j^4-\left(E_j-c\right)18\sin\theta/\omega_j^6$,

$A_j=18\sin\theta/\omega_j^4$. Отделяя в (13) вещественную и мнимую части, получаем фазовую скорость волны c и инкремент β:

$$c=18\sin\theta\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j^4}=3\sin\theta$$
$$\beta=k^2\,\mathrm{Re}_m\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2D_j}{\omega_j^4}-18\sin\theta\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(E_j-c\right)}{\omega_j^6}\right) \quad (14)$$

Подставляя в (14) фазовую скорость волны, выражения для D_j, E_j, а также значения сумм

$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j^8}=\frac{17}{630}$, $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j^6}=\frac{1}{15}$, $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j^4}=\frac{1}{6}$, получаем

$$\beta=k^2\,\mathrm{Re}_m\left(\frac{41}{35}\sin^2\theta-\cos\theta/\mathrm{Re}_m-Wek^2/3\right) \quad (15).$$

При $k\to 0$ из (15) получаем критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_*=(35/41)ctg\theta$. Это довольно близко к значению $\mathrm{Re}_*=(5/6)ctg\theta$,, полученному из уравнения Орра-Зоммерфельда (отличие 2,5%).

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис.1, 2 приведены расчетные зависимости пространственного инкремента δ(k) и фазовой скорости c(k) волны в сравнении с экспериментами [4]. Пространственный инкремент вычислялся по соотношению Гастера $\delta=\beta/(c+kdc/dk)$. Там же для сравнения показан расчет по модели [2]. Из рисунков видно, что расчетные значения инкремента и фазовой скорости хорошо согласуются с данными [4]. Тестовые расчеты пока-

зали, что для волновых чисел, принадлежащих области неустойчивости, достаточно учитывать 5-6 гармоник. Увеличение количества гармоник до 20 приводит к изменению лишь в четвертом десятичном знаке. На рис.3 показана размерная частота нейтральных волн f_C в зависимости от числа Рейнольдса $R = gh_0^3 \sin\theta / 2\nu^2$. Расчеты сделаны по разным моделям для условий экспериментов [5]. Как видно из рисунка, модель [2] дает более крутой наклон кривой $f_C(R)$, модель [3] первого порядка также дает завышенные значения f_C. Наш расчет хорошо согласуется как с экспериментальными данными, так и с упрощенной моделью [3] второго порядка.

Волновые режимы течения пленки получены решением уравнений (11) конечноразностным методом. Участок счета $0 < x < X_{end}$ выбирался достаточно большим, чтобы можно было проследить развитие волн вниз по потоку. На входе участка счета задавались возмущение расхода $q(0,t) = q_0\left(1 + Q_a \sin 2\pi \cdot f \cdot t\right)$ и параболический профиль скорости. Здесь q_0 – невозмущенный расход, Q_a – малая амплитуда, f – заданная частота колебаний расхода. На участке счета задавалась равномерная сетка с координатами узлов $x_i = (i-1)\Delta x$, $i = 1,2,3\ldots N_x + 1$. Уравнения (11) записывались в разностном виде по неявной схеме:

$$\bar{q}_i^{\,j} = q_i^j + \Delta t\left(K_i \bar{h}_i - \frac{\omega_j^2 \bar{q}_i^{\,j}}{\mathrm{Re}_m\, \bar{h}_i^{\,2}} - \overline{\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)_i} + We\bar{h}_i \overline{\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)_i} \right),$$

$$\bar{h}_i = h_i - \Delta t \sum_{j=1}^{N} \overline{\left(\frac{\partial q_i^{\,j}}{\partial x}\right)}$$

Здесь Δt – шаг по времени, N – число гармоник, $J = \omega_j^2 q_j^2 / 2h$, $K_i = \left(6/\mathrm{Re}_m\, \omega_j^2\right)\left(\sin\theta - \cos\theta \overline{(\partial h/\partial x)}_i\right)$. Чертой сверху обозначены значения на новом временном слое, без черты – значения на старом временном слое.

Для $\partial q / \partial x$ аппроксимация взята в виде:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_i = \begin{cases} (q_{i+1} - q_{i-1})/2\Delta x, & i = 2,3\ldots N_x \\ (3q_i - 4q_{i-1} + q_{i-2})/2\Delta x, & i = N_x + 1 \end{cases}.$$

Производная $\partial J / \partial x$ аппроксимировалась разностью против потока:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)_i = \begin{cases} (J_i - J_{i-1})/\Delta x, & q_i > 0 \\ (J_{i+1} - J_i)/\Delta x, & q_i < 0 \end{cases}.$$

Разностная аппроксимация $\partial^3 h / \partial x^3$ взята в виде

$$\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)_i = \begin{cases} (h_{i+2} - 2h_{i+1} + 2h_{i-1} - h_{i-2})/2\Delta x^3, & i = 3,..N_x - 1 \\ (-h_{i-1} + 3h_i - 3h_{i+1} + h_{i+2})/\Delta x^3, & i = 2 \end{cases}$$

На границе $x = X_{end}$ ставилось условие $\left(\partial^3 h/\partial x^3\right)_{N_x+1} = \left(\partial^3 h/\partial x^3\right)_{N_x} = \left(\partial^3 h/\partial x^3\right)_{N_x-1}$, которое позволяет минимизировать эффект отражения волн от границы, обусловленный спецификой аппроксимации производных в граничных узлах.

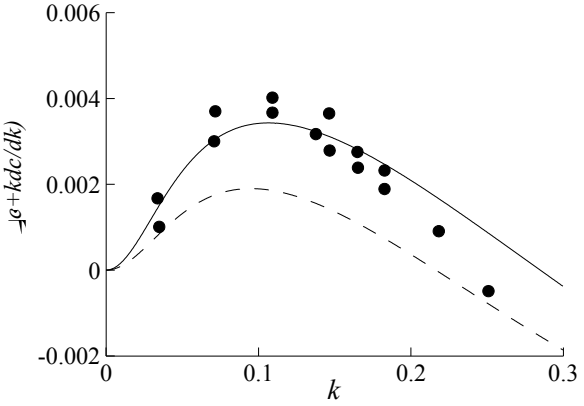

Рис.1 Пространственный инкремент при θ=4,6°; Re=15,33. Сплошная линия – новая модель, штриховая линия – модель [2]; ● – эксперимент [4].

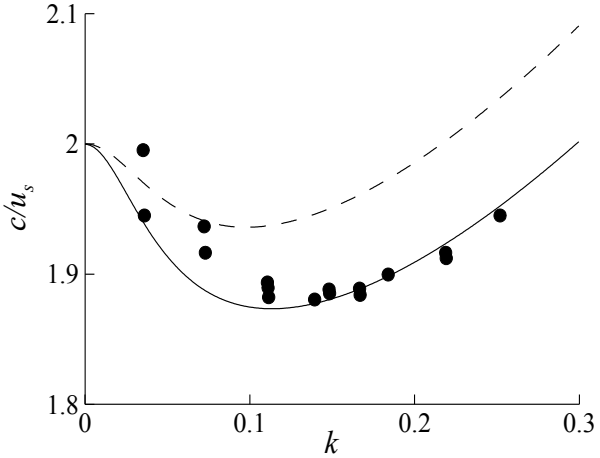

Рис.2. Фазовая скорость при θ=4,6°; Re=15,33. Сплошная линия – новая модель, штриховая линия – модель [2]; ● – эксперимент [4].

Значения $\bar{q}_i^{\,j}$, $\bar{h}_i$, $i = 2,3\ldots N_x + 1$ вычислялись методом итераций (в правую часть подставлялись значения, найденные из предыдущей итерации). Для начала итераций брались значения на старом временном слое. Сходимость итераций обеспечивалась выбором достаточно малого шага по времени.

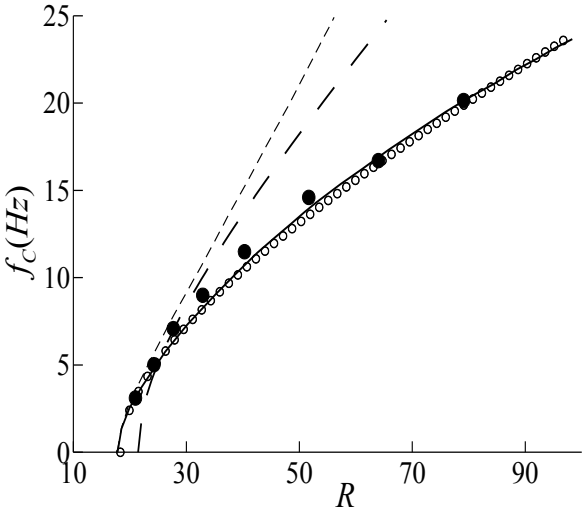

Рис.3 Частота нейтральных волн f_C в зависимости от числа Рейнольдса R при θ=4°; ● – экспериментальные данные [5]; толстая штриховая линия – модель [2]; тонкая штриховая линия – модель [3] первого порядка; сплошная линия – упрощенная модель [3] второго порядка; ○ – наш расчет.

На рис.4, 5 показано сравнение рассчитанной волновой поверхности пленки с экспримен-тальными данными [6] для возбужденных волн частотой f=1,5 Hz при θ=6,4°; Re=19,33. Из рисунков видно, что малые возмущения (в расчете задавалось Q_a=0,03) в процессе распространения эволюционируют в солитоноподобные волны большой амплитуды. Новая модель хорошо описывает амплитуду развивающихся волн, правильно передавая форму волновой поверхности пленки.

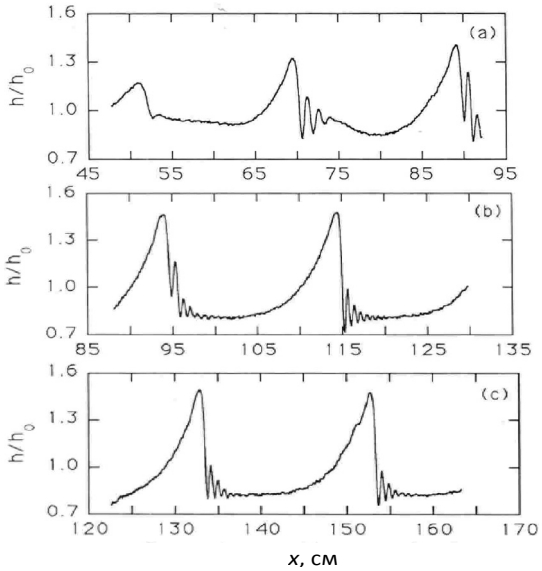

Рис.4 Волны на поверхности пленки, эксперимент [6]; водоглицерино вый раствор, θ=6,4°; Re=19,33; f=1,5 Hz.

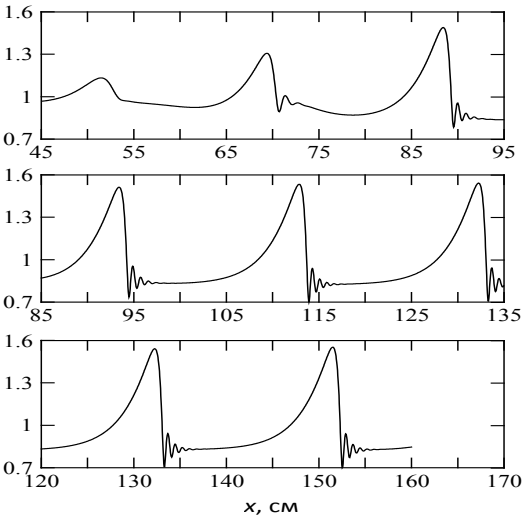

Рис.5 Волны на поверхности пленки, расчет; водоглицериновый раствор; θ=6,4°; Re=19,33; f=1,5 Hz.

ВЫВОДЫ

Предложенная модель волнового течения пленки жидкости, имеющая первый порядок по параметру длинноволновости, хорошо описывает линейные и нелинейные волны. В частности, она предсказывает границу области устойчивости для малых углов наклона пленки к горизонту. Результаты расчетов эволюции возбужденных волн хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Определенные на интервале $0<\eta<1$ линейно независимые гармоники $f_j(\eta)=\sin\omega_j\eta$, где $\omega_j=(2j-1)\pi/2$, $j=1,2,3\ldots$. удовлетворяют краевым условиям $f_j(0)=f_j'(1)=0$, $f_j(1)=(-1)^{j-1}$. Скалярное произведение определяется как $\int_0^1 f_j f_i d\eta$. Нетрудно видеть, что $\int_0^1 f_j f_i d\eta=\delta_{ij}/2$, т.е. гармоники $f_j(\eta)$ образуют ортогональный базис. Любую непрерывную функцию $F(\eta)$ на интервале $0<\eta<1$ можно представить в виде ряда $F(\eta)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j f_j(\eta)$, где коэффициенты aj определяются формулой $a_j=2\int_0^1 F(\eta)\sin\omega_j\eta d\eta$.

Вычислив интегралы

$$\int_0^1 \eta\sin\omega_j\eta\cdot d\eta=(-1)^{j-1}/\omega_j^2$$

$$\int_0^1 (\eta^2/2)\sin\omega_j\eta d\eta=(-1)^{j-1}/\omega_j^2-1/\omega_j^3$$

$$\int_0^1 (\eta^3/3)\sin\omega_j\eta\cdot d\eta=(-1)^{j-1}/\omega_j^2-2(-1)^{j-1}/\omega_j^4$$

и комбинируя эти три равенства, получаем

$$\int_0^1 (\eta-\eta^2/2)\sin\omega_j\eta\cdot d\eta=1/\omega_j^3$$

$$\int_0^1 (\eta-\eta^3/3)\sin\omega_j\eta\cdot d\eta=2(-1)^{j-1}/\omega_j^4$$

Таким образом, мы получаем разложения в ряд следующих функций:

$$\eta=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{j-1}}{\omega_j^2}\sin\omega_j\eta \quad . \qquad \text{(a.1)}$$

$$\eta-\eta^2/2=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_j^3}\sin\omega_j\eta \quad , \qquad \text{(a.2)}$$

$$\eta-\eta^3/3=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{j-1}}{\omega_j^4}\sin\omega_j\eta \quad . \text{(a.3)}$$

Подставляя $\eta=1$ в равенства (a.1) и (a.3), вычисляем суммы:

$$\sum_{j=1}^{\infty}1/\omega_j^2=1/2 \text{ и } \sum_{j=1}^{\infty}1/\omega_j^4=1/6.$$

Равенство (a.2) возведем в квадрат и проинтегрируем по η от 0 до 1. В результате получаем

$$\int_0^1 (\eta^2-\eta^3+\eta^4/4)d\eta=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_j^6}.$$

Вычислив $\int_0^1 (\eta^2-\eta^3+\eta^4/4)d\eta=2/15$,

находим сумму $\sum_{j=1}^{\infty}1/\omega_j^6=1/15.$

Равенство (a.3) возведем в квадрат и проинтегрируем по η от 0 до 1. В результате получаем

$$\int_0^1 (\eta^2-2\eta^4/3+\eta^6/9)d\eta=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{8}{\omega_j^8}$$

Вычислив $\int_0^1 (\eta^2-2\eta^4/3+\eta^6/9)d\eta=68/315$,

находим сумму $\sum_{j=1}^{\infty}1/\omega_j^8=17/630.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. – 1948. –Т. 18. – № 1. – С.3–28.
2. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. –1967. –№ 1. – С. 43–51.
3. C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Improved modeling of flows down inclined planes // Eur. Phys. J. – 2000. B. – Vol. 15. – P.357–369.
4. J. Liu, J.D. Paul, J.P. Gollub. Measurements of the primary instabilities of film flow // J. Fluid Mech. –1993. – Vol. 250. –P. 69–101.
5. Jun Liu, B. Schneider, J.P. Gollub. Three-dimensional instabilities of film flows // Phys. Fluids. –1995. – Vol. 7. –N. 1. – P. 55-63.
6. Jun Liu and J.P. Gollub. Solitary wave dynamics of film flows // Phys. Fluids. –1994. – Vol.6. –N. 5. –P. 1702–1711.