УДК 532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

Актершев С. П., Куйбин П.А.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12 01 00360-а, ФЦП "Исследования и разработки ...", ГК 11.519.11.6022, ФЦП "Кадры", ГК 16.740.11.0063, гранта Президента НШ-6686.2012.8.

АННОТАЦИЯ

Разработан новый метод решения задачи устойчивости закрученного течения вязкой несжимаемой жидкости. Метод, основанный на разложении искомых функций в ряд по степеням радиальной координаты, позволяет избежать трудностей, связанных с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений с особой точкой. В качестве примера рассмотрена устойчивость течения Пуазейля во вращающейся трубе.

ВВЕДЕНИЕ

Закрученные потоки широко применяются в технике. Так, в высоконапорных гидротурбинах закрутка потока используется для создания крутящего момента на рабочем колесе и в оптимальном режиме на выходе из рабочего колеса закрутка потока практически отсутствует. В режимах же частичной или форсированной нагрузки значительный уровень закрутки остается в следе за рабочим колесом. Проблемы, возникающие в этом случае, являются общими для различных вихревых аппаратов, применяемых для интенсификации тепломассопереноса или химических реакций, в биореакторах и сепараторах, в вихревых горелках и т.п. С целью интенсификации процессов вихревые аппараты эксплуатируются в условиях высокой степени закрутки потока. В результате развития неустойчивости потока в аппаратах могут возникать регулярные пульсации давления большой амплитуды на частотах, близких к собственным механическим или акустическим частотам.

Для адекватного описания динамики закрученного потока крайне актуально получение априорной информации о возможных неустойчивостях течения. При линейном анализе неустойчивости уравнения Навье-Стокса линеаризуют и рассматривают экспоненциально растущие (или убывающие) возмущения в пространственной или временно́й постановке. Задача сводится к поиску собственных частот (длин волн) и соответствующих собственных функций для различных мод колебаний.

В данной работе рассмотрен новый метод решения задачи устойчивости ограниченного закрученного потока вязкой несжимаемой жидкости, основанный на разложении искомых функций в ряд по степеням радиальной координаты. Этот метод позволяет избежать трудностей, связанных с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений с особой точкой на оси цилиндрического канала.

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Для осесимметричного закрученного течения несжимаемой жидкости в трубе компоненты вектора скорости в цилиндрических координатах будут $V_z = U(r)$, $V_r = 0$, $V_\varphi = W(r)$. Возьмем в качестве линейного масштаба радиус трубы R, масштаба скорости – скорость на оси трубы U_0, масштаба времени R/U_0 и перейдем к безразмерным переменным, сохраняя для всех физических величин традиционные буквенные обозначения. Рассмотрим малые

© Актершев С. П., Куйбин П.А.

возмущения компонент скорости и давления в виде бегущей волны:

$$\{\overline{V}_z,\overline{V}_r,\overline{V}_\varphi,\overline{p}\}=\{F,iS,H,P\}\exp(i(\alpha z+n\varphi-\alpha ct)) \qquad (1)$$

Выражение (1) описывает периодические по координатам z и φ возмущения, растущие или затухающие во времени. Здесь i – мнимая единица, α – вещественное волновое число, n – азимутальное волновое число (целое), $c=c_r+ic_i$ – комплексная скорость распространения возмущения, F(r), S(r), H(r), P(r) – комплексные амплитудные функции. Положительные значения n соответствуют распространению волны в направлении закрутки, отрицательные – в противоположном направлении. Величина αc_i дает временной инкремент, αc_r – частоту колебаний. Положительные значения инкремента соответствуют растущим возмущениям. Подстановка (1) в линеаризованные уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности приводит к системе дифференциальных уравнений [1].

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rS')'-(n^2+1)S-2nH\right)= \\ =r^2\left(\gamma+\alpha^2/i\,\mathrm{Re}\right)S+2rHW-r^2P' \qquad (2)$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rH')'-(n^2+1)H-2nS\right)= \\ =\left(\gamma+\alpha^2/i\,\mathrm{Re}\right)r^2H+(W'+W/r)r^2S+rnP \qquad (3)$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rF')'-n^2F\right)= \\ =\left(\gamma+\alpha^2/i\,\mathrm{Re}\right)r^2F+\alpha r^2P+r^2SU' \qquad (4)$$

$$\alpha rF+(rS)'+nH=0 \qquad (5)$$

Здесь $\mathrm{Re}=U_0R/\nu$ – число Рейнольдса, $\gamma=\alpha(U-c)+nW/r$, штрих означает производную по r. Граничные условия для (2)-(5) таковы. На оси трубы: при $n=0$ $F(0)$ и $P(0)$ ограничены, $S(0)=H(0)=0$; при $n=\pm1$ $F(0)=P(0)=0$, $S(0)\pm H(0)=0$; при $|n|>1$ $F(0)=P(0)=S(0)=H(0)=0$. На стенке: $S(1)=H(1)=F(1)=0$.

Решение уравнений (2)-(5) с указанными граничными условиями существует только для определенных значений комплексной скорости (задача на собственные значения).

Перейдем к переменным ψ = (S + H)/2 и θ = (S – H)/2. В новых переменных система (2)-(5) примет вид

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(r\psi')'-(n+1)^2\psi\right)= \\ =\left(\gamma+\frac{\alpha^2}{i\,\mathrm{Re}}+\beta_1\right)r^2\psi+\beta_2r^2\theta+\frac{1}{2}\left(rnP-r^2P'\right) \qquad (6)$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(r\theta')'-(n-1)^2\theta\right)= \\ =\left(\gamma+\frac{\alpha^2}{i\,\mathrm{Re}}-\beta_1\right)r^2\theta-\beta_2r^2\psi-\frac{1}{2}\left(rnP+r^2P'\right) \qquad (7)$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rF')'-n^2F\right)= \\ =\left(\gamma+\frac{\alpha^2}{i\,\mathrm{Re}}\right)r^2F+\alpha r^2P+r^2U'(\psi+\theta) \qquad (8)$$

$$r\theta'+r\psi'+(n+1)\psi-(n-1)\theta=-\alpha rF\,. \qquad (9)$$

Здесь обозначено $\beta_1(r)=0{,}5(W'+3W/r)$, $\beta_2(r)=0{,}5(W'-W/r)$. Граничные условия для ψ и θ таковы. На оси трубы: при $n=0$ $\psi(0)=\theta(0)=0$; при $n=1$ $\theta(0)=S(0)$, $\psi(0)=0$; при $n=-1$ $\psi(0)=S(0)$, $\theta(0)=0$; при $|n|>1$ $\psi(0)=\theta(0)=0$. На стенке: $\psi(1)=\theta(1)=F(1)=0$.

В отличие от (2)-(5), система уравнений (6)-(9) обладает свойством симметрии, в частности, она инвариантна относительно замены $n\to-n$, $\psi\to\theta$, $\theta\to\psi$, $\beta_1\to-\beta_1$, $\beta_2\to-\beta_2$.

В отличие от (2)-(5), система уравнений (6)-(9) обладает свойством симметрии, в частности, она инвариантна относительно замены $n\to-n$, $\psi\to\theta$, $\theta\to\psi$, $\beta_1\to-\beta_1$, $\beta_2\to-\beta_2$.

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ

В качестве примера рассмотрим течение во вращающейся трубе с распределением осевой скорости в виде профиля Пуазейля $U=1-r^2$ и азимутальной скоростью, распределенной по закону твердотельного вращения W = qr, где $q=\Omega R/U_0$ – параметр закрутки, Ω – угловая скорость вращения. Известно, что рассматриваемое закрученное течение в отличие от классического течения Пуазейля является неустойчивым по отношению к неосесимметричным возмущениям. Впервые этот факт был обнаружен в [2, 3] асимптотическими методами, позднее это было подтверждено в [4-6] численными методами. В зависимости от определяющих параметров задачи (числа Рейнольдса и параметра закрутки) в потоке может одновременно

наблюдаться несколько неустойчивых мод. Так же как и для течений типа свободного вихря, наиболее неустойчивой оказалась мода n = –1. Детальное исследование данной проблемы проведено в [1] исходя из численного интегрирования уравнений. Система (2)-(5) представлялась в виде шести дифференциальных уравнений первого порядка и численного интегрировалась методом Кутта-Мерсона. Принципиальная трудность в реализации этого метода заключается в быстром (паразитическом) росте одного или нескольких решений при численном интегрировании, в результате чего теряется их линейная независимость. Для обхода этих трудностей на каждом шаге интегрирования применялась процедура ортогонализации линейно независимых решений.

Решение методом разложения в ряд Тейлора

Рассмотрим метод решения системы уравнений (6)-(9), не использующий численное интегрирование и позволяющий избежать, связанных с этим трудностей. Для течения Пуазейля во вращающейся трубе имеем:

$$\gamma = \alpha(1-c) + nq - \alpha r^2, \qquad \beta_1(r) = 2q, \qquad \beta_2(r) = 0,$$

поэтому первые скобки в правой части уравнений (6) и (7) принимают вид

$$\left(\gamma + \alpha^2/i\,\mathrm{Re} + \beta_1\right) = \alpha(1-c) + nq + \alpha^2/i\,\mathrm{Re} - \alpha r^2 + 2q$$
$$\left(\gamma + \alpha^2/i\,\mathrm{Re} - \beta_1\right) = \alpha(1-c) + nq + \alpha^2/i\,\mathrm{Re} - \alpha r^2 - 2q$$

Введем замену $\psi = i\,\mathrm{Re}\,\widetilde{\psi}$, $\theta = i\,\mathrm{Re}\,\widetilde{\theta}$, $F = i\,\mathrm{Re}^2\,\widetilde{F}$, $\alpha = \widetilde{\alpha}/\mathrm{Re}$, $q = \widetilde{q}/\mathrm{Re}$. Такая замена вызвана необходимостью рассматривать большие значения Re. Известно, что при $\mathrm{Re}\to\infty$ волновое число порядка 1/Re, поэтому $\widetilde{\alpha}\sim 1$. Для переменных с тильдой уравнения (6)-(9) примут вид

$$r(r\widetilde{\psi}')' - (n+1)^2\widetilde{\psi} = \left(b + 2i\widetilde{q} - i\widetilde{\alpha}r^2\right)r^2\widetilde{\psi} + \left(rnP - r^2P'\right)/2$$
$$r(r\widetilde{\theta}')' - (n-1)^2\widetilde{\theta} = \left(b - 2i\widetilde{q} - i\widetilde{\alpha}r^2\right)r^2\widetilde{\theta} - \left(rnP + r^2P'\right)/2$$
$$r(r\widetilde{F}')' - n^2\widetilde{F} = \left(b - i\widetilde{\alpha}r^2\right)r^2\widetilde{F} + r^2P\widetilde{\alpha}/\mathrm{Re}^2 - 2ir^3(\widetilde{\psi} + \widetilde{\theta})$$
$$r\widetilde{\theta}' + r\widetilde{\psi}' + (n+1)\widetilde{\psi} - (n-1)\widetilde{\theta} = -\widetilde{\alpha}r\widetilde{F} \qquad (10)$$

Разложим искомые функции $\widetilde{\psi}(r)$, $\widetilde{\theta}(r)$, $\widetilde{F}(r)$, $P(r)$ в ряд Тейлора по степеням переменной r, представив их в виде:

Разложим искомые функции $\widetilde{\psi}(r)$, $\widetilde{\theta}(r)$, $\widetilde{F}(r)$, в ряд Тейлора по степеням переменной r, представив их в виде:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi} &= \psi_0 r^k + \psi_1 r^{k+2} + \psi_2 r^{k+4} + \ldots + \psi_m r^{k+2m} \\
\widetilde{\theta} &= \theta_0 r^k + \theta_1 r^{k+2} + \theta_2 r^{k+4} + \ldots + \theta_m r^{k+2m}
\end{aligned}, \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{F} &= f_1 r^{k+1} + f_2 r^{k+3} + \ldots + f_m r^{k+2m-1} \\
P &= p_1 r^{k+1} + p_2 r^{k+3} + \ldots + p_m r^{k+2m-1}
\end{aligned}, \qquad (12)$$

Для функций $\widetilde{\psi}$ и $\widetilde{\theta}$ ряд начинается со степени $k = |n| - 1$; для функций $\widetilde{F}$ и P степень на единицу больше. При k = 0 коэффициенты ψ_0 и θ_0 дают значения $\psi(0)$ и $\theta(0)$, а при $|n| > 1$ выполняются граничные условия $F(0) = P(0) = \psi(0) = \theta(0) = 0$. В дальнейшем будем рассматривать только отрицательные моды (n < 0), поскольку только они дают неустойчивость. Подставляя ряды в уравнения (10)-(13) и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями r в обеих частях, получаем для коэффициентов ряда рекуррентные соотношения:

$$\left((k+2m)^2 - k^2\right)\psi_m = \left(b + 2i\widetilde{q}\right)\psi_{m-1} - i\widetilde{\alpha}\psi_{m-2} - p_m(k+m)$$
$$\left((k+2m)^2 - (k+2)^2\right)\theta_m = \left(b - 2i\widetilde{q}\right)\theta_{m-1} - i\widetilde{\alpha}\theta_{m-2} - p_m(m-1)$$
$$\left((k+2m-1)^2 - (k+1)^2\right)f_m = bf_{m-1} - i\widetilde{\alpha}f_{m-2} + p_{m-1}\widetilde{\alpha}/\mathrm{Re}^2 - 2i(\psi_{m-2} + \theta_{m-2})$$
$$2(m+k+1)\theta_m + 2m\psi_m = -\widetilde{\alpha}f_m.$$

Эти соотношения позволяют выразить коэффициенты рядов с номером m через предыдущие коэффициенты с номерами m – 1 и m – 2. Если известны «стартовые» коэффициенты с номерами 0 и 1, то остальные вычисляются из рекуррентных соотношений, тем самым, будут найдены все искомые функции. Рекуррентные соотношения можно разрешить относительно ψ_m, θ_m, p_m, f_m. После некоторых преобразований получаем

$$f_m = \frac{bf_{m-1} - i\widetilde{\alpha}f_{m-2} + p_{m-1}\widetilde{\alpha}/\mathrm{Re}^2 - 2i(\psi_{m-2} + \theta_{m-2})}{4(m+k)(m-1)} \qquad (13)$$

$$p_m = \frac{4i\widetilde{q}E_{m-1} - 2i\widetilde{\alpha}K_{m-2} + p_{m-1}\widetilde{\alpha}^2/\mathrm{Re}^2}{4(m+k)(m-1)}, \qquad (14)$$

$$\theta_m = -\frac{E_m + \widetilde{\alpha}f_m/2}{2(m+k+1)}, \qquad \psi_m = \frac{E_m - \widetilde{\alpha}f_m/2}{2m} \qquad (15)$$

$$E_m = \frac{bE_{m-1} - i\widetilde{\alpha}\left(\widetilde{q}f_{m-1} + (m-1)\psi_{m-2} - (m+k)\theta_{m-2}\right)}{4(k+m)(m-1)}. \qquad (16)$$

Здесь введены обозначения:

$$E_m = m\psi_m - (m+k+1)\theta_m,$$
$$K_{m-2} = m\psi_{m-2} + (m+k+1)\theta_{m-2} + \widetilde{\alpha}f_{m-2}/2.$$

Из (13)-(16) следует, что θ_0=0, а коэффициенты p_1, f_1, ψ_0 не определены. Таким образом, p_1, f_1, ψ_0 являются «стартовыми» коэффициентами, из которых вычисляются все остальные. В частности, для коэффициентов с номером 1 находим

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{b + 2i\widetilde{q}}{k+1}\psi_0 - p_1\right),$$

$$\theta_1 = -\frac{\psi_1 + \tilde{\alpha} f_1/2}{k+2} = \frac{1}{4(k+2)}\left(p_1 - \frac{b+2i\tilde{q}}{k+1}\psi_0 - 2\tilde{\alpha} f_1\right),$$

$$E_1 = \psi_1 - (k+2)\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{b+2i\tilde{q}}{k+1}\psi_0 + \tilde{\alpha} f_1 - p_1\right).$$

Значения «стартовых» коэффициентов вычисляются из граничных условий на стенке. Зададим достаточно большое число членов ряда N. Подставляя r = 1 в (14) и (15), получаем

$$\tilde{\theta}(1) = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_N, \quad \tilde{F}(1) = f_1 + f_2 + \ldots + f_N.$$

Отсюда следует, что $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$ определяются «стартовыми» коэффициентами. Поскольку рекуррентные соотношения линейны, значения $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$ являются линейными функциями «стартовых» коэффициентов, т.е. их можно представить в виде

$$\tilde{F}(1) = A_1 p_1 + B_1 f_1 + D_1 \psi_0,$$

$$\tilde{\theta}(1) = A_2 p_1 + B_2 f_1 + D_2 \psi_0.$$

Неизвестные константы A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2 найдем следующим образом. Зададим $(p_1, f_1, \psi_0) = (0,0,1)$ и по рекуррентным формулам вычислим остальные коэффициенты рядов (14), (15). Тем самым мы получим значения $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$, равные, соответственно, D_1 и D_2. Если задать $(p_1, f_1, \psi_0) = (1,0,0)$, то вычисленные значения $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$ равны A_1 и A_2. При $(p_1, f_1, \psi_0) = (0,1,0)$ значения $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$ равны B_1 и B_2. Граничные условия $\tilde{F}(1) = \tilde{\theta}(1) = 0$ приводят к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} A_1 p_1 + B_1 f_1 + D_1 \psi_0 &= 0 \\ A_2 p_1 + B_2 f_1 + D_2 \psi_0 &= 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

Поскольку искомые функции $\tilde{\psi}(r)$, $\tilde{\theta}(r)$, $\tilde{F}(r)$, $P(r)$ определены с точностью до произвольного множителя, значение ψ_0 можно положить произвольной константой. Таким образом, из (17) находим

$$p_1 = \psi_0 (D_2 B_1 - D_1 B_2)/(A_1 B_2 - A_2 B_1),$$
$$f_1 = \psi_0 (A_2 D_1 - A_1 D_2)/(A_1 B_2 - A_2 B_1).$$

Остается выполнить последнее граничное условие на стенке

$$\tilde{\psi}(1) = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_N = 0 \ . \qquad (18)$$

Условие (18) служит для вычисления собственного значения комплексной скорости, которая присутствует в рекуррентных соотношениях только через комплексную величину b=x+iy, где $x = \tilde{\alpha} c_i + \tilde{\alpha}^2/\mathrm{Re}^2$ и $y = \tilde{\alpha} + n\tilde{q} - \tilde{\alpha} c_r$ вещественная и мнимая части b. Условие (18) равносильно двум уравнениям

$$G_R(x,y) = 0, \quad G_I(x,y) = 0, \qquad (19)$$

где G_R и G_I – вещественная и мнимая части $\tilde{\psi}(1)$. Система уравнений (19) решалась итерациями методом Ньютона-Рафсона.

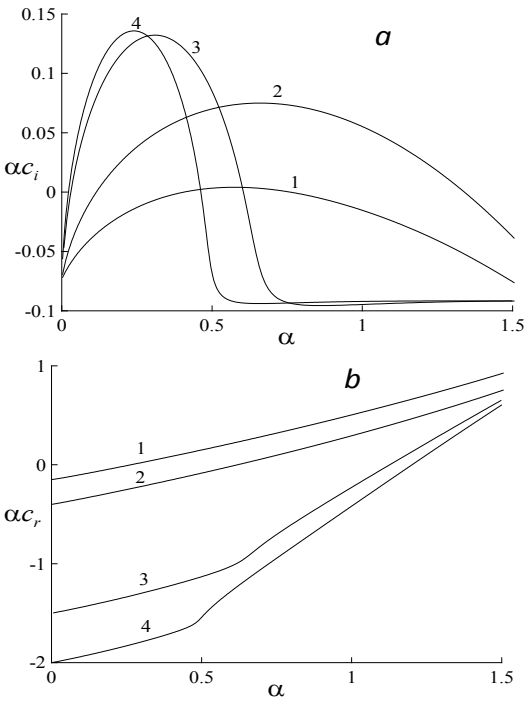

Рис.1 Зависимости инкремента (a) и частоты колебаний (b) от волнового числа при Re=200 для различных значений параметра закрутки q: 1– 0,15; 2– 0,4; 3– 1,5; 4– 2.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Тестовые расчеты показали, что 35-40 членов ряда Тейлора вполне достаточно для аппроксимации искомых функций. Увеличение количества членов ряда до N = 75 приводит к изменению вычисленных значений фазовой скорости только в шестом десятичном знаке. На рисунках 1-3 приведены результаты расчетов для наиболее неустойчивой моды n = –1.

На рис.1 показаны зависимости инкремента и частоты колебаний от волнового числа при

Re = 200 для различных значений параметра закрутки q.

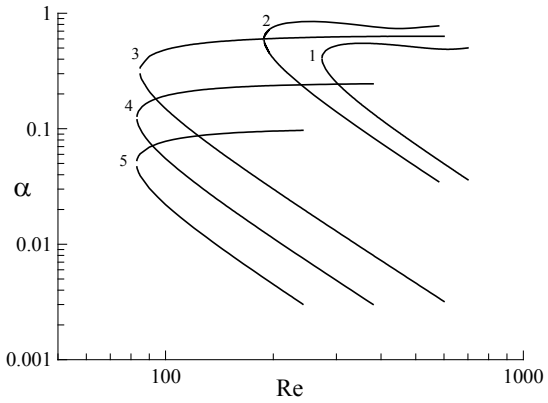

Рис.2 Нейтральные кривые для различных значений q: 1– 0,15; 2– 0,4; 3– 1,5; 4– 2.

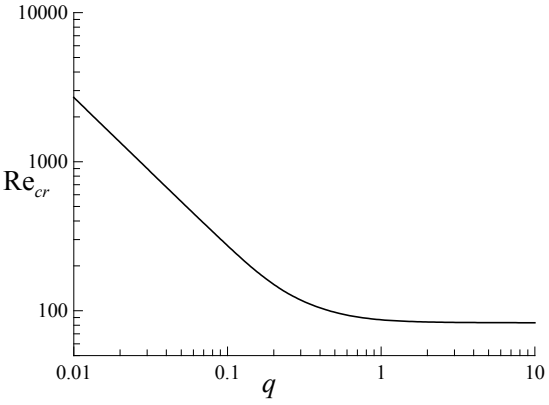

Рис.3 Граница области устойчивости.

При q < 0,1 для любых значений волнового числа инкремент отрицательный; с увеличением q появляется диапазон волнового числа, в котором инкремент положительный (область неустойчивости). По мере роста q область неустойчивости расширяется, а максимальное значение инкремента растет. При q > 1 максимум инкремента увеличивается незначительно, а область неустойчивости существенно сужается и при q = 2 наблюдается только в диапазоне 0,03 < α < 0,5. Длина волны максимального роста значительно уменьшается. Фазовая скорость волн максимального роста при малых q положительная, но очень мала, а при q > 1 фазовая скорость растущих возмущений отрицательная.

Кривые нейтральной устойчивости для различных значений параметра закрутки представлены на рис.2 в координатах (α, Re). Область неустойчивости, лежащая внутри нейтральной кривой, существует для любого фиксированного значения q при $Re > Re_{cr}$. Расчитанная граница области устойчивости показана на рис.3 (область неустойчивости лежит выше кривой). При малых q значение Recr велико и монотонно уменьшается с ростом параметра закрутки ($Re_{cr} \approx 27/q$). В диапазоне 1 < q < 10 критическое число Рейнольдса меняется слабо ($Re_{cr} \approx 83 \div 85$). В пределе $q \to \infty$ расчетное значение критического числа Рейнольдса составляет 82,9201, что полностью соответствует полученному ранее в работах [1,5,6] значению $Re_{cr} = 82{,}92$. Сравнение расчитанных Recr и соответствующих им значений α с расчетами [1] показало совпадения с точностью до третьего десятичного знака.

ВЫВОДЫ

Разработан новый метод решения задачи устойчивости закрученного течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале. Метод основан на разложении искомых функций в ряд по степеням радиальной координаты. Алгоритм решения сводится к итерационной процедуре, в которой коэффициенты ряда вычисляются из системы линейных алгебраических уравнений. Тем самым в задаче «на собственные значения» удается избежать трудностей, связанных с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений с особой точкой.

В качестве примера рассмотрена устойчивость течения Пуазейля во вращающейся трубе. Новый метод дает хорошее совпадение с расчетами на основе численного интегрирования дифференциальных уравнений

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Численное моделирование вязких вихревых течений для технических приложений. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 176 С.
2. Pedley T. J. On the instability of rapidly rotating shear flows to nonaxisymmetric disturbances // J. Fluid Mech. – 1968. – Vol. 31. – P. 603 – 607.
3. Pedley T. J. On the instability of viscous flow in a rapidly rotating pipe // J. Fluid Mech. –1969. – Vol. 35. – P. 97 – 115.
4. Maslowe S. A. Instability of rigidly rotating flows to non-axisymmetric disturbances // J. Fluid Mech. –1974. – Vol. 64. – P. 307–317.
5. Mackrodt P.A. Stability of Hagen-Poiseuille flow with superimposed rigid rotation // J. Fluid Mech. –1976. Vol. 73–. № 1. – P. 153–164.
6. Fernandez-Feria R., Pino C. The onset of absolute instability of rotating Hagen-Poiseuille flow: A spatial stability analysis // Phys. Fluids. –2002. – Vol. 14. – P. 3087–3097.