УДК 536.3+536.42

ОДНОФАЗНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА В ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ. ПОСТАНОВКА И АНАЛИЗ

Слепцов С.Д., Рубцов Н.А.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-08-00154-а.

АННОТАЦИЯ

Проведено численное моделирование модифицированной постановки классической задачи Стефана в полупрозрачных средах. Получены поля температур, поле результирующего радиационного потока излучения, динамика раздела фаз и эволюция роста температуры левой границы образца в широком диапазоне степеней черноты правой облучаемой границы. Проведен анализ теплоотдачи и теплопроводности на межфазной границе в зависимости от оптических свойств поверхности.

Проведен анализ теплоотдачи и теплопроводности на межфазной границе в зависимости от оптических свойств поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

Однофазная задача Стефана является частным случаем двухфазной задачи Стефана, в которой температура одной из фаз тождественно равна постоянной температуре фазового перехода [1]. Очевидно, что в рамках подобного, классического, решения условие Стефана на границе фаз со стороны фазы с постоянной температурой содержит тепловой поток нулевого значения. В реальности, по обе стороны границы фаз существует перенос тепловой энергии, и физические модели однофазной задачи Стефана не удовлетворяют указанным условиям. Здесь можно отметить наиболее характерные работы [2, 3], в которых численно моделируются процессы нагрева и оплавления однородных полупрозрачных пластин за счет одностороннего внешнего радиационно-конвективного (кондуктивного) подвода тепловой энергии.

В статье [4] использовалась классическое приближение задачи Стефана, основанная на работе [1]. Исходя из теории классической задачи Стефана на границе раздела фаз, в данной работе, предполагалось, что тепловая энергия, выделяемая на поверхности жидкой фазы фронта фазового превращения за счет излучения, компенсируется потоком тепловой энергии испаряющегося вещества. При решении задачи ограничения по степеням черноты поверхностей не отмечается, также не наблюдается перегревы в твердой, конденсированной фазе.

В данной работе предлагается дальнейшее развитие классического подхода к решению однофазной задачи Стефана.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается нагрев и последующее плавление бесконечного плоскопараллельного образца из полупрозрачной серой среды с коэффициентом объемного поглощения излучения a и теплопроводностью l. Границы плоского образца не поглощают (A_i=0), частично отражают (R_i=const) и пропускают (D_i=1–R_i) полусферическое излучение в процессе нагрева образца. Нагреваемая граница i = 2 при достижении температуры фазового перехода трансформируется в полупрозрачную, удовлетворяющую, по оптическим свойствам условию $A_i+R_i+D_i=1$, i = 2 при переменных значениях A_2. При этом предполагается справедливость закона Кирхгофа $A_2=e_2$, где e_2 – степень черноты правой границы.

© Слепцов С.Д., Рубцов Н.А.

Решение задачи сводится к рассмотрению нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в процессе нагрева плоского образца излучением и конвекцией со стороны облучаемой границы.

При достижении нагреваемой границей образца температуры плавления T_f начинается второй этап, на протяжении которого рассматривается задача Стефана.

Уравнение сохранения энергии, записываемое в общем случае, имеет вид:

$$\tilde{n}_{ps}\rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = c_{ps}\rho_s \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} - E\right), \qquad (1)$$

где c_{ps}, ρ_s, λ_s – теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности пластины, $E=E(x, t)$ – плотность потока результирующего излучения в сечении x в момент времени t, определяемая из решения радиационной задачи методом средних потоков (см. ниже).

При $\partial x/\partial t$ уравнение (1) используется при рассмотрении первого этапа решения задачи. Граничные условия уравнения (1), определяющего этап нагрева образца имеют вид:

$$-\lambda_s \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} + h_1\left(T - T_1\right)\Big|_{x-\delta} = 0, \; x = 0, \qquad (2)$$

$$\lambda_s \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} - h_2\left(T_2 - T\right)\Big|_{x+\delta} = 0, \; x=L_0, \qquad (3)$$

где h_i – коэффициент конвективного теплообмена границ $i = 1, 2$ с внешней средой с температурой T_i.

При рассмотрении второго этапа решения задачи граничное условие (2) остается неизменным, а граничное условие (3) трансформируется в условие Стефана, при этом температура правой границы, по условию задачи, фиксируется:

$$\lambda_s \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} - \lambda_l \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} - h_2\left(T_l - T_2\right) - \left|E_2\right| = \rho_{sf}\gamma_f \frac{\partial L}{\partial t},$$

$$T(x, t), \;\; x = L(t), \qquad (4)$$

где λ_l – коэффициент теплопроводности расплава, формирующегося на внешней поверхности фронта фазового перехода, h_2 – условное значение коэффициента конвективной теплоотдачи от пленки расплава при температуре $T_l=T_f$ в окружающую среду за счет испарения (абляции), γ_f – скрытая теплота фазового перехода.

В уравнении (4) использовано определение

$$\left|E_2\right| = A_2\left[E^+(x-\delta) + E^*\right] - \varepsilon_2\left(1+n^2\right)E_b(T_f), \; x=L(t), \qquad (5)$$

где $E^+(x-\delta)$, E^* – плотность потоков излучения, соответственно, падающего на сечение x от среды пластины и внешнего источника, $E_b(T_f)$ – плотность потока равновесного излучения при температуре T_f (температура фазового перехода), n – показатель преломления излучения материала пластины.

Следуя классическому подходу, при решении однофазной задачи Стефана [1] полагаем суммарное значение результирующего потока на внешней поверхности, $x+\delta$, $x = L(t)$, тождественно равным нулю

$$q^{\Sigma}(x+\delta) = 0, \;\; x = L(t), \qquad (6)$$

$$q^{\Sigma}(x+\delta) = \lambda_l \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} - E_{res,2}(x+\delta) - h_2\left(T_l - T_2\right)\Big|_{x+\delta}. \qquad (7)$$

В (7) $E_{res,2}(x+\delta)$ – плотность потока результирующего излучения на внешней стороне поверхности x, $x=L(t)$, значение которой, с учетом проницаемости границы x, определяется выражением:

$$-E_{res,2}(x+\delta) = \left(A_2 + D_2\right)E^* - \varepsilon_2\sigma_0 T_f^4 - D_2 E^+(x-\delta) \qquad (8)$$

Принимая во внимание определение

$$\left|E\right| = E_{res,2}(x-\delta) - E_{res,2}(x+\delta) \qquad (9)$$

а также учитывая (5), (7) и (8) окончательное выражение условия Стефана на правой границе пластины записывается в виде:

$$\lambda_s \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x-\delta} - \left(A_2 + D_2\right)E^+(x-\delta) + D_2 E^* + \varepsilon_2 n^2 \sigma_0 T_f^4 =$$

$$= \rho_{sf}\gamma_f \frac{\partial L}{\partial t},$$

$$T(x-\delta)=T_f, \; T(x+\delta)=T_l, \; T_l=T_f \qquad (10)$$

Система уравнений (1)-(3) для этапа нагрева дополняется начальным условием:

$$T(x, t) = T_1 = \text{const}, \quad t = 0, \qquad (11)$$

а система уравнений (1), (2), (5) для задачи Стефана – начальным условием:

$$T(x, t) = f(x), \quad L(t) = L_0, \quad t = 0. \qquad (12)$$

Плотности потоков полусферического (поверхностного) излучения $E(x, t)$, фигурирующие в уравнениях энергии (1) и (4) с учетом их определения (5), вычисляются на основании решения уравнения переноса энергии излучения, записываемого в виде системы дифференциальных уравнений метода средних потоков (СП-метод) [5]:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\left(E^{+}-E^{-}\right)+\left(m^{+}E^{+}-m^{-}E^{-}\right)=4n^{2}\sigma_{0}T^{4},$$
$$\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\left(m^{+}l^{+}E^{+}-m^{-}l^{-}E^{-}\right)+\left(E^{+}-E^{-}\right)=0. \quad (13)$$

Здесь $m^{\pm}$ и $l^{\pm}$ – коэффициенты распределения интенсивности и диффузии излучения в среде по направлениям в пределах полусфер $\Omega=\pm 2\pi$, принимающие на границах осредненные значения $\overline{m}^{\pm}=\mp 2$, $\overline{l}^{\pm}=\pm 1/3$ соответственно. Система уравнений (13) дополняется радиационными граничными условиями, записываемыми относительно плотностей потоков эффективного излучения следующим образом [6]:

$$E^{+}(0,t)=A_1 n^2\sigma_0 T^4(0,t)+D_1\sigma_0 T_1^4+$$
$$+\left(1-\left(1-R_1\right)/n^2\right)E^{-}(0,t), \quad (10)$$
$$E^{-}(L,t)=A_2 n^2\sigma_0 T^4(L,t)+D_2 E^{*}+$$
$$+\left(1-\left(1-R_2\right)/n^2\right)E^{+}(L,t), \quad (11)$$

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ

Численное моделирование связано с определением полей температур и плотностей потоков излучения, а также динамики толщины слоя серой полупрозрачной среды в зависимости от поглощательной способности фронта плавления. Теплофизические свойства материала образца близки к свойствам стекла: плотность ρ_s=2000 кг/м^3, коэффициент теплопроводности λ_s=1 Вт/(м×K), температуропроводность $a_s=10^{-6}$ м^2/с, температура плавления T_f=1000 K, скрытая теплота фазового перехода γ_f=500 кДж/кг, показатель преломления n = 1,5, коэффициент объемного поглощения излучения в материале образца a = 10 м$^{-1}$. Начальная толщина образца L_0=0,1 м и начальная оптическая толщина $\tau_0=\alpha L_0=1$ отражают оптимальный характер объемного взаимодействия излучения с материалом образца. Падающий поток излучения E^{*}=200 кВт/м^2, температура среды, окружающей левую границу T_1 = 300 K, температура газа, окружающего правую сторону образца, со стороны источника излучения T_2 = 900 K (меньше T_f). Коэффициент теплоотдачи на левой границе h_1 = 1 или 10 Вт/(м^2×K). Правая граница поддерживается при температуре плавления с нулевым значением внешнего, по отношению к границе, результирующего, радиационно-кондуктивного потока тепловой энергии (условие классического решения однофазной задачи Стефана). Коэффициенты отражения поверхностей обеих границ $R_{1,2}$ = 0,1. При моделировании процессов радиационно-кондуктивного теплообмена полагаем излучательные (поглощательные) способности границ $e_{1,2}=A_{1,2}=0$. При переходе на задачу Стефана изменению подлежит излучательная (поглощательная) способность только правой поверхности, облучаемой и претерпевающей фазовый переход границы в пределах $e_2=A_2$=0,1÷0,8. Предполагается, что это позволяет смоделировать ситуацию, при которой поверхностные слои материала, претерпевающего фазовые переходы 1-го рода, гипотетически меняют свои оптические свойства.

В ходе моделирования определялись поля безразмерных значений температур $\theta(\xi,\eta)=T(x,t)/T_f$, плотностей потоков результирующего излучения $\Phi=E(x,t)/4\sigma_0 T_f^4$. При этом используется переменная x = $x/L(t)$, позволяющая фиксировать координату фронта фазового перехода в границах 0≤ξ≤1 [7]. Безразмерное время $\eta=a_s t/L_0^2$. Динамика фронта фазового перехода, $L=L(t)$, дается в форме зависимости текущего значения толщины твердой фазы от времени, либо в безразмерном виде, $s(\eta)=L(t)/L_0$.

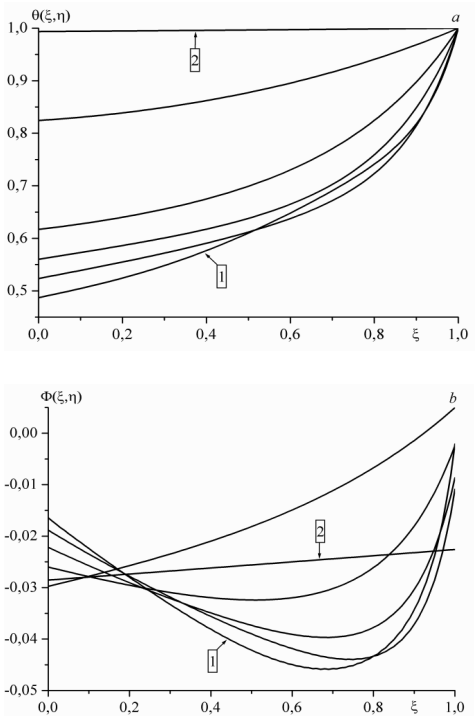

Рис.1 Температурное поле и поле результирующей плотности потока излучения (*1* – начало и *2* – конец фазового перехода).

На рисунках 1 представлены кинетика полей температур и радиационных потоков в слое с прозрачными границами при ее радиационно-конвективном нагреве, а также – с прозрачной левой и частично поглощающей, пропускающей и отражающей правой границей, претерпевающей фазовый переход первого рода при ε_2=0,8 и теплоотдаче на левой границе h_1=10 Вт/(м^2 К). Обращает на себя внимание монотонный характер температурных линий $\theta(\xi,\eta)$ (без перегревов, рис. 1, а) с экстремумами полей радиационных потоков $\Phi(\xi, \eta)$ (рис. 1, b).

Важную роль играет конвективная составляющая теплоотдачи на левой границе.

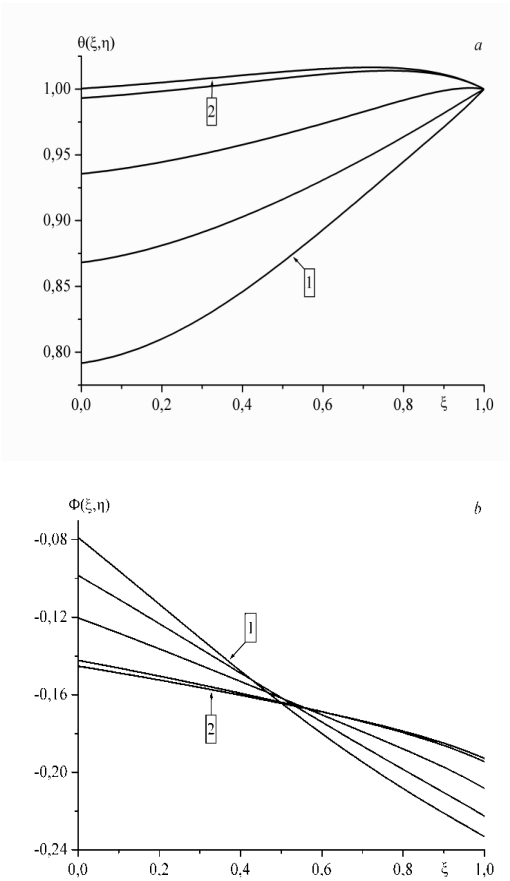

Рис.2 Температурное поле и поле результирующего радиационного потока излучения (*1* – начало и *2* – конец фазового перехода).

На рис. 2 представлены результаты расчетов для случая, когда коэффициент конвективной теплоотдачи от левой границы снижается на порядок (h_1=1 Вт/(м^{2}К)) по сравнению с предыдущими случаями (Рис. 1). При малом значении поглощательной способности правой границы (ε_2=0,1) отмечается перегрев среды в слое, достижение левой границей температуры фазового перехода (рис. 2, а) и отсутствие экстремумов в значениях радиационных потоков (рис. 2, b). Это обстоятельство связано с высоким значением пропускательной способности правой границы (D_2=0,8), и перегревом слоя внешним источником излучения в условиях слабой конвективной теплоотдачи левой границей пластины.

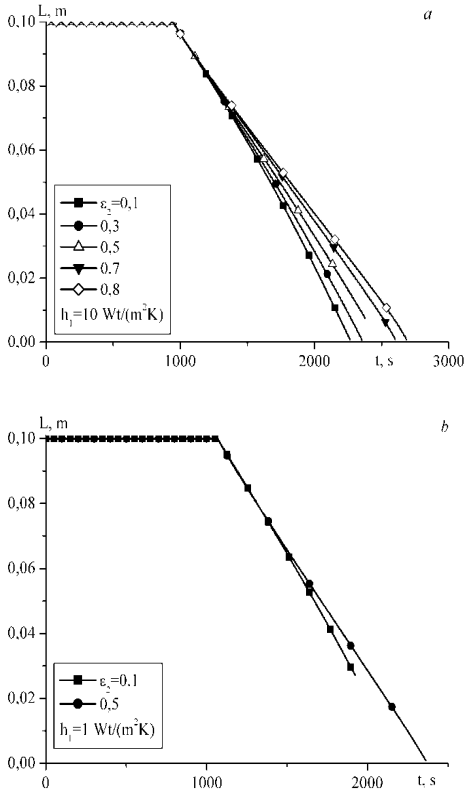

Рис.3 Динамика фронта фазового перехода.

На рис. 3 представлены динамики положения фронта фазового перехода для различных значений степени черноты правой границы ε_2 и коэффициента конвективной теплоотдачи h_1. Следует отметить, что на этап нагрева при h_1=10 Вт/(м^{2}К) (рис. 3, а) отводится меньше времени, чем при h_1=1 Вт/(м^{2}К) (рис. 3, b). Положение фронта L сравнительно слабо зависит от его степени черноты.

Из условия для классического решения задачи Стефана (7) можно получить теплоотдачу на межфазной поверхности в зависимости от его оптических свойств.

Предполагая, что образующийся слой жидкой фазы является изотермическим, т.е. $\lambda_l \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\delta} = 0$, а также учитывая, что в этом случае $T_l \equiv T_f$ запишем (7) в виде зависимости:

$$h_{2f} = \frac{(A_{2f} + D_{2f})E^* - \varepsilon_{2f}\sigma_0 T_f^4 - D_{2f}E^+(x-\delta)}{T_f - T_2}, \quad (12)$$

Здесь $T_f - T_2$=const и первые два члена в скобках справа являются постоянными при фиксированных значениях оптических свойств фронта фазового перехода.

Последний член, $D_{2f}E^+(x-\delta)$, имеющий смысл плотности потока излучения, выходящего из объемно излучающей и поглощающей пластины, изменяется во времени в связи с уменьшением толщины твердой фазы. Следовательно, коэффициент теплоотдачи за счет испарения пленки жидкой фазы является функционалом

$$h_{2f} = h_{2f}(A_{2f} \equiv \varepsilon_{2f}, D_{2f}, \alpha, L(t)) \ ,$$

где $A_{2f}, \varepsilon_{2f}, D_{2f}, \alpha$ – характеризуют оптические свойства границ пластины и среды ее формирующие.

В безразмерных параметрах (12) имеет вид:

$$K(\eta) = \frac{(A_2 + D_2)\Phi^* - \varepsilon_2/4 - D_2\Phi^+(1,\eta)}{(1-\theta_2)N},$$

где $K(\eta) = h_{2f}L_0/\lambda_s$ – критерий, подобный критерию Био, $N = \lambda_s/(4\sigma_0 T_f^3 L_0)$ – радиационно-кондуктивный параметр.

При фиксированных значениях оптических свойств фронта фазового перехода, $A_{2f} \equiv \varepsilon_{2f}$, коэффициент теплоотдачи за счет испарения пленки жидкой фазы функционально зависит от оптической толщины, $\alpha \cdot L(t)$, образца, сокращающейся в процессе плавления. Моделирование процессов теплообмена в твердой фазе полупрозрачной пластины с оптическими свойствами фронта фазового превращения, $A_{2f} \equiv \varepsilon_{2f}$, в широком диапазоне их значений сопряжено с изменениями направления суммарного потока тепловой энергии $q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta)$, x=$L(t)$. Условие $q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta) > 0$ свидетельствует об оттоке тепловой энергии со стороны внешней границы жидкой фазы в окружающую среду. При этом из определения (7) вытекает условие,

$$h_{2f}(T_f - T_2) > \lambda_l \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\delta} - E_{2f}(x+\delta)$$

при котором возможна ситуация прекращения фазового перехода. При $q_{2f}^{\Sigma}(x+\delta) < 0$ суммарная тепловая энергия поступает во фронт фазового перехода через сечение $x+\delta$, x=$L(t)$ со стороны окружающей среды. В этом случае движение фронта фазового перехода осуществляется за счет охлаждения через левую (x=0) границу пластины.

На рис. 4 представлены безразмерный коэффициент теплоотдачи K и поток тепла теплопроводностью со временем

$$q(L(t),\ t) = -\lambda_s\, \partial T(L(t),\ t)/\partial t \ .$$

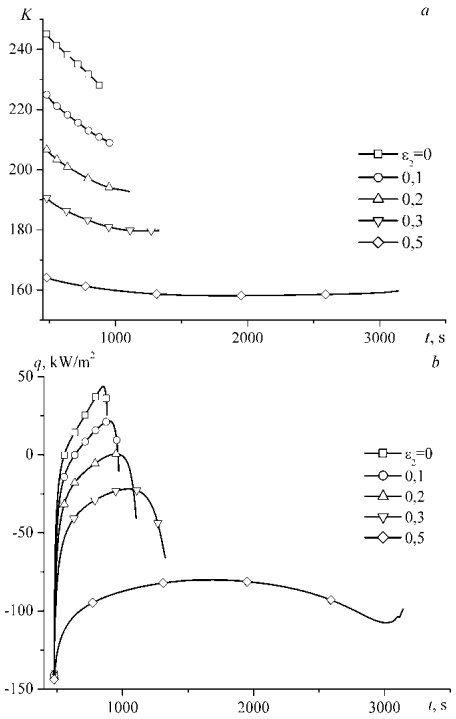

Рис.4 Зависимость $K(\eta)$ и $q(L(t),t)$ от времени при разных степенях черноты ε_2.

Рис. 4, а иллюстрирует кинетику изменения коэффициента теплоотдачи жидкой фазы за счет испарения. Как видно, по мере роста поглощательной способности межфазной границы проявляется нелинейный характер зависимости K=$K(t)$ при снижении ее уровня из-за уменьшения пропускательной способности границы и соответствующей инверсией потока тепла теплопроводностью.

Зависимость плотности потока энергии теплопроводностью представлена на рис. 4, b, $q(L(t),t)$, пересекающего межфазную границу в процессе фазового превращения. При значениях ε_2<0,2 отмечается рост значений с максимальными значениями близкими по времени к завершению процесса. Однако, при $\varepsilon_2 \geq 0{,}3$, q переходит в область отрицательных значений, т.е. поток энергии теплопроводностью пересекает межфазную границу со стороны изотермической пленки жидкой фазы, нагреваемой внешним излучением. При этом процесс фазового превращения затягивается во времени более чем в 2 раза по сравнению с продолжительностью процесса фазового перехода при малых ε_2 (~1500 с).

ВЫВОДЫ

Использование приближения классического решения задачи Стефана, которое в рассматриваемых условиях основано на предположении, что поток тепловой энергии, формирующейся при испарении жидкой фазы в окружающее пространство уравновешивается потоком результирующего излучения, поступающим извне, со стороны источника излучения, оказывается эффективным в широком диапазоне значений ε_2 и физически оправданным. Последнее связано с тем, что физическое объяснение перегревов твердой фазы и соответствующей неустойчивости решения задачи Стефана, по видимому связано с условиями вынужденного сопряжения неравновесной жидкой фазы с фронтом фазового превращения, определяемого в равновесных условиях. Эффективность приближения классического решения определяется возможностью инверсий потоков тепловой энергии как теплопроводностью (при $\varepsilon_2 \geq 0{,}3$), так и результирующим излучением (при $\varepsilon_2 \geq 0{,}5$) в жидкой фазе в условиях рассмотренной задачи.

Искусственное поддержание равновесного состояния внешней среды, примыкающей к жидкой фазе при нулевом значении потока энергии, на порядок ускоряет процесс плавления по сравнению с вариантом наличия неравновесности, вызванной подводом потока тепловой энергии, и, оказывается, сопоставим по времени с процессами плавления твердой фазы, имеющей абсолютно черную границу фазового превращения.

Тем самым, представляется возможным, в зависимости от условий теплообмена на внешней стороне границы пластины, претерпевающей фазовый переход, осуществлять моделирование тепловых процессов применительно к разработкам как эффективной тепловой защиты, так и совершенной технологии плавления (испарения) слоев полупрозрачных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с. A.M. Meyrmanov (1986) *Zadacha Stefana* [Stefan Problem], Nauka, Novosibirsk, 1986, 240 p.,
2. Le Dez V., et al. Problem de Stefan direct dans un milieu semitransparent gris // J. Phys. III France. 1996. Vol. 6. P. 373-390
3. Рубцов Н.А., Слепцов С.Д. Радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с фазовым переходом на границах разной поглощательной способности // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 2. С. 237-245. N.A. Rubtsov and S.D. Sleptsov *Radiatsionno-konduktivnyu teploobmen v poluprozrachnoy srede s fazovym perekhodom na granitsakh raznoy pogloshchatelnoy sposobnosti* [Radiant-conductive heat transfer in semitransparent medium with phase transition at boundaries with different absorptivity], Thermophysics and Aeromechanics, 2010, Vol. 17, No. 2, pp. 221-228.
4. Рубцов Н.А., Слепцов С.Д. Моделирование радиационно-кондуктивного теплообмена в слое полупрозрачной среды в приближении классического решения однофазной задачи Стефана // Теплофизика и Аэромеханика. 2011. Т. 18, №3. С. N.A. Rubtsov and S.D. Sleptsov *Modelirovanie radiatsionno-konduktivnogo teploobmena v sloe poluprozrachnoy sredy v priblizhenii klassicheskogo resheniya odnofaznoy zadachi Stefana* [Radiant-conductive heat transfer in semitransparent medium with phase transition at boundaries with different absorptivity], Thermophysics and Aeromechanics, 2010, Vol. 17, No. 2, pp. 221-228.
5. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А. Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 197 с. N.A. Rubtsov, A.M. Timofeev and N.A. Savvinova *Kombinirovannyu teploobmen v poluprozrachnykh sredakh* [Combined Heat Exchange in Semitransparent Media], SB RAS Publ., Novosibirsk, 2003. 198 p.
6. Рубцов Н.А. К решению однофазной задачи Стефана в слое полупрозрачного материала // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 3. С. 471-482. N.A. Rubtsov *K resheniyu odnofaznoy zadachi Stefana v sloe poluprozrachnogo materiala* [On the solution of one-phase Stefan problem in a layer of semi-transparent material], Thermophysics and Aeromechanics, 2005, Vol. 12, No. 3, pp. 439–449.
7. Landau H.G. Heat conduction in a melting solid // Quart. Appl. Math. 1950. Vol. 8. P. 81-94.