УДК 532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Актершев С.П., Куйбин П.А.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-01-00360, 11-08-01063, ФЦП «Кадры», грант № 8225, гранта Президента РФ НШ-6686.2012.8, гранта Правительства РФ для ведущих ученых № 11.G34.31.0046.

АННОТАЦИЯ

Разработан новый метод решения задачи устойчивости вихревого течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе. Метод, основанный на разложении поля скорости невозмущенного потока, а также возмущения поля скорости в ряд по степеням радиальной координаты, применен для довольно широкого класса осесимметричных вихревых течений несжимаемой жидкости. Этот метод позволяет избежать трудностей, связанных с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений с особой точкой.

ВВЕДЕНИЕ

Закрученные потоки широко применяются в технике – для сепарации примесей, для осушки газов, для стабилизации горения, для вихревого энергоразделения и т.д. В гидротурбинах закрутка потока используется для создания крутящего момента на рабочем колесе. Если в оптимальном режиме на выходе из рабочего колеса закрутка потока практически отсутствует, то в режимах частичной или форсированной нагрузки значительный уровень закрутки остается в следе за турбиной. В результате развития неустойчивости потока в аппаратах могут возникать пульсационные явления на частотах, близких к собственным механическим или акустическим частотам, т.е. приводить к резонансу. Поэтому оценка собственных частот неустойчивых возмущений закрученного потока является актуальной задачей.

При линейном анализе неустойчивости уравнения Навье-Стокса линеаризуют и рассматривают экспоненциально растущие (или убывающие) возмущения в пространственной или временно́й постановке. Задача сводится к поиску собственных частот (длин волн) и соответствующих собственных функций для различных мод колебаний [1].

В [2, 3] предложен новый метод решения задачи устойчивости для течения Пуазейля во вращающейся трубе. Метод основан на разложении искомых функций в ряд по степеням радиальной координаты, что позволяет избежать трудностей, связанных с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений с особой точкой на оси цилиндрической трубы. Сравнение расчетов по новому методу с результатами [1, 4, 5] показало хорошее совпадение. В данной работе этот метод обобщен на довольно широкий класс вихревых осесимметричных течений несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе. Профили скорости невозмущенного потока также как искомые функции, описывающие возмущение потока, разлагаются в ряд по степеням радиальной координаты.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

Для осесимметричного вихревого течения несжимаемой жидкости в трубе компоненты вектора скорости в цилиндрических координатах будут $V_z = U(r)$, $V_r = 0$, $V_j = qW(r)$, где q - безразмерный параметр закрутки. Возьмем в качестве линейного масштаба радиус трубы R, масштаба скорости - скорость на оси трубы U_0, масштаба времени R/U_0 и перейдем к безразмерным переменным, сохраняя для всех физических величин традиционные буквенные

© Актершев С.П., Куйбин П.А.

обозначения. Рассмотрим малые возмущения компонент скорости и давления в виде бегущей волны:

$$\{\overline{V}_z, \overline{V}_r, \overline{V}_\varphi, \overline{p}\} = \{F, iS, H, P\}\exp(i(\alpha z + n\varphi - \alpha ct)) \quad (1)$$

Выражение (1) описывает периодические по координатам z и j возмущения, растущие или затухающие во времени. Здесь i - мнимая единица, a - вещественное волновое число, n - азимутальное волновое число (целое), $c = c_r + ic_i$ - комплексная скорость распространения возмущения, $F(r)$, $S(r)$, $H(r)$, $P(r)$ - комплексные амплитудные функции. Положительные значения n соответствуют распространению волны в направлении закрутки, отрицательные - в противоположном направлении. Величина ac_i дает временной инкремент, ac_r – частоту колебаний. Положительные значения инкремента соответствуют растущим возмущениям. Подстановка (1) в линеаризованные уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности приводит к системе дифференциальных уравнений [1].

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rS')' - (n^2+1)S - 2nH\right) = \\ = r^2\left(\gamma + \alpha^2/i\,\mathrm{Re}\right)S + 2rHW - r^2P' \quad (2)$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rH')' - (n^2+1)H - 2nS\right) = \\ = \left(\gamma + \alpha^2/i\,\mathrm{Re}\right)r^2H + (W' + W/r)r^2S + rnP \quad (3)$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rF')' - n^2F\right) = \\ = \left(\gamma + \alpha^2/i\,\mathrm{Re}\right)r^2F + \alpha r^2P + r^2SU' \quad (4)$$

$$\alpha rF + (rS)' + nH = 0 \quad (5)$$

Здесь Re = U_0R/n - число Рейнольдса, g = a(U – c) + nW/r, штрих означает производную по r. Граничные условия для (2)-(5) таковы. На оси трубы: при n = 0 $F(0)$ и $P(0)$ ограничены, $S(0) = H(0) = 0$; при $n = \pm 1$ $F(0) = P(0) = 0$, $S(0) \pm H(0) = 0$; при $|n| > 1$ $F(0) = P(0) = S(0) = H(0) = 0$. На стенке: $S(1) = H(1) = F(1) = 0$.

Решение уравнений (2)-(5) с указанными граничными условиями существует только для определенных значений комплексной скорости (задача на собственные значения).

Перейдем к переменным y = (S + H)/2 и q = (S - H)/2. В новых переменных система (2)-(5) примет вид

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(r\psi')' - (n+1)^2\psi\right) = \\ = \left(\gamma + \frac{\alpha^2}{i\,\mathrm{Re}} + \beta\right)r^2\psi + \chi r^2\theta + \frac{1}{2}\left(rnP - r^2P'\right), \quad (6)$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(r\theta')' - (n-1)^2\theta\right) = \\ = \left(\gamma + \frac{\alpha^2}{i\,\mathrm{Re}} - \beta\right)r^2\theta - \chi r^2\psi - \frac{1}{2}\left(rnP + r^2P'\right), \quad (7)$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rF')' - n^2F\right) = \\ = \left(\gamma + \frac{\alpha^2}{i\,\mathrm{Re}}\right)r^2F + \alpha r^2P + r^2U'(\psi + \theta), \quad (8)$$

$$r\theta' + r\psi' + (n+1)\psi - (n-1)\theta = -\alpha rF. \quad (9)$$

Здесь обозначено $\beta(r) = 0{,}5(W' + 3W/r)$, $\chi(r) = 0{,}5(W' - W/r)$. Граничные условия для y и q таковы. На оси трубы: при n = 0 $\psi(0) = \theta(0) = 0$; при n = 1 $\theta(0) = S(0)$, $\psi(0) = 0$; при n = -1 $\psi(0) = S(0)$, $\theta(0) = 0$; при $|n|>1$ $\psi(0) = \theta(0) = 0$. На стенке: $\psi(1) = \theta(1) = F(1) = 0$.

В отличие от (2)-(5), система уравнений (6)-(9) обладает свойством симметрии, в частности, она инвариантна относительно замены $n \to -n$, $\psi \to \theta$, $\theta \to \psi$, $\beta \to -\beta$, $\chi \to -\chi$. Перейдем к новым масштабам с помощью замены $\psi = i\,\mathrm{Re}\,\tilde{\psi}$, $\theta = i\,\mathrm{Re}\,\tilde{\theta}$, $F = i\,\mathrm{Re}^2\,\tilde{F}$, $\alpha = \tilde{\alpha}/\mathrm{Re}$, $q = \tilde{q}/\mathrm{Re}$. Такое масштабирование вызвано необходимостью рассматривать большие значения числа Рейнольдса. Известно, что при $\mathrm{Re} \to \infty$ волновое число растущих возмущений порядка 1/Re, поэтому $\tilde{\alpha} \sim 1$. Для переменных с тильдой уравнения (6)-(9) принимают вид

$$r(r\tilde{\psi}')' - (n+1)^2\tilde{\psi} = \\ = (b + i\tilde{q}\beta)r^2\tilde{\psi} + i\tilde{q}r^2\chi\tilde{\theta} + \left(rnP - r^2P'\right)/2 \quad (10)$$

$$r(r\tilde{\theta}')' - (n-1)^2\tilde{\theta} = \\ = (b - i\tilde{q}\beta)r^2\tilde{\theta} - i\tilde{q}r^2\chi\tilde{\psi} - \left(rnP + r^2P'\right)/2 \quad (11)$$

$$r(r\tilde{F}')' - n^2\tilde{F} = \\ = br^2\tilde{F} + r^2P\tilde{\alpha}/\mathrm{Re}^2 + ir^2U'(\tilde{\psi} + \tilde{\theta}) \quad (12)$$

$$r\tilde{\theta}' + r\tilde{\psi}' + (n+1)\tilde{\psi} - (n-1)\tilde{\theta} = -\tilde{\alpha}r\tilde{F} \quad (13)$$

Здесь введено обозначение

$$b(r) = i\,\mathrm{Re}\,\gamma + \alpha^2 = \\ = i\left(\tilde{\alpha}(U(r) - c_r) + n\tilde{q}W/r\right) + \tilde{\alpha}c_i + \tilde{\alpha}^2/\mathrm{Re}^2$$

Уравнения (10)-(12) также как исходные уравнения (2)-(4) имеют особенность в точке r=0.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД

Не рассматривая моду $n=0$, будем искать решение (10)-(13) в виде:

$$\widetilde{\psi}(r)=r^k\Psi(r),\ \widetilde{\theta}(r)=r^k\Theta(r),$$
$$\widetilde{F}(r)=r^{k+1}\Phi(r),\ P(r)=r^{k+1}\Pi(r), \qquad (14)$$

где $k=|n|-1\ge 0$. При $|n|>1$ имеем $k\ge 1$, поэтому на оси трубы автоматически выполняется условие $\psi(0)=\theta(0)=0$. Левые части уравнений (6)-(8) преобразуются к виду:

$$r(r\tilde{\psi}')'-(n+1)^2\tilde{\psi}=$$
$$=r^k\left[r^2\Psi''+(2|n|-1)r\Psi'+\left((|n|-1)^2-(n+1)^2\right)\Psi\right]$$

$$r(r\tilde{\theta}')'-(n-1)^2\tilde{\theta}=$$
$$=r^k\left[r^2\Theta''+(2|n|-1)r\Theta'+\left((|n|-1)^2-(n-1)^2\right)\Theta\right]$$

$$r(r\widetilde{F}')'-n^2\widetilde{F}=r^{k+1}\left[r^2\Phi''+(2|n|+1)r\Phi'+\left(|n|^2-n^2\right)\Phi\right]$$

Подставляя это и (14) в уравнения (10)-(13), преобразуем их к виду

$$r^2\Psi''+(2|n|-1)r\Psi'+(|n|-n-2)(|n|+n)\Psi=$$
$$=(b+i\tilde{q}\beta)r^2\Psi+i\tilde{q}\chi r^2\Theta+ \qquad (15)$$
$$+r^2\left((n-|n|)\Pi-r\Pi'\right)/2,$$

$$r^2\Theta''+(2|n|-1)r\Theta'+(|n|+n-2)(|n|-n)\Theta=$$
$$=(b-i\tilde{q}\beta)r^2\Theta-i\tilde{q}\chi r^2\Psi- \qquad (16)$$
$$-r^2\left((n+|n|)\Pi+r\Pi'\right)/2,$$

$$r^2\Phi''+(2|n|+1)r\Phi'=$$
$$=br^2\Phi+\frac{\widetilde{\alpha}}{\mathrm{Re}^2}r^2\Pi+iU'r(\Psi+\Theta), \qquad (17)$$

$$r\Theta'+r\Psi'+(|n|+n)\Psi+(|n|-n)\Theta=-\widetilde{\alpha}r^2\Phi. \qquad (18)$$

Рассмотрим случай $n<0$, который соответствует наиболее опасным возмущениям. В этом случае имеем $n=-|n|$ и уравнения (15)-(18) несколько упрощаются:

$$r^2\Psi''+(2|n|-1)r\Psi'=$$
$$=(b+i\tilde{q}\beta)r^2\Psi+i\tilde{q}\chi r^2\Theta- \qquad (19)$$
$$-r^2\left(|n|\Pi+r\Pi'/2\right),$$

$$r^2\Theta''+(2|n|-1)r\Theta'-4|n|\Theta=$$
$$=(b-i\tilde{q}\beta)r^2\Theta-i\tilde{q}\chi r^2\Psi-r^3\Pi'/2, \qquad (20)$$

$$r^2\Phi''+(2|n|+1)r\Phi'=$$
$$=br^2\Phi+\frac{\widetilde{\alpha}}{\mathrm{Re}^2}r^2\Pi+iU'r(\Psi+\Theta), \qquad (21)$$

$$r\Theta'+r\Psi'+2|n|\Theta=-\widetilde{\alpha}r^2\Phi. \qquad (22)$$

Рассмотрим такие вихревые течения, для которых функции b, b, c, $U'r$ можно представить в виде ряда по четным степеням радиальной координаты r:

$$b(r)=b_0+b_1r^2+b_2r^4+\ldots+b_mr^{2m},$$
$$\beta(r)=\beta_0+\beta_1r^2+\beta_2r^4+\ldots+\beta_mr^{2m},$$
$$\chi(r)=r^2X(r),\ X(r)=\chi_0+\chi_1r^2+\ldots+\chi_mr^{2m}, \qquad (23)$$
$$U'r=r^2u(r),\quad u(r)=u_0+u_1r^2+\ldots+u_mr^{2m}.$$

Примеры течений, для которых поле скорости можно представить в ряд вида (23)

Пример 1. Течение Пуазейля во вращающейся трубе с полем скорости $U=1-r^2$, $W=r$. Отсюда

$$b(r)=b_0+b_1r^2,$$

$$b_0=i\left(\widetilde{\alpha}(1-c_r)+n\tilde{q}\right)+\widetilde{\alpha}c_i+\widetilde{\alpha}^2/\mathrm{Re}^2,$$

$$b_1=-i\widetilde{\alpha},\ \beta(r)=2,\ \chi(r)=0,\ U'r=-2r^2.$$

В этом примере ряды состоят из одного или двух членов.

Пример 2. Струйное течение типа «вихрь Бэтчелора» с полем скорости:

$U=\exp\left(-r^2/a^2\right)$, $V_\varphi=q\left(1-\exp\left(-r^2/a^2\right)\right)/r$.

Здесь a - характерный радиус вихревого ядра. Раскладывая экспоненту в ряд, получаем

$$\beta(r)=\frac{\exp\left(-r^2/a^2\right)}{a^2}+\frac{1-\exp\left(-r^2/a^2\right)}{r^2}=$$
$$=\frac{2}{a^2}-\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)\frac{r^2}{a^4}+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)\frac{r^4}{a^6}-\ldots,$$

$$\chi(r)=\frac{\exp\left(-r^2/a^2\right)}{a^2}-\frac{1-\exp\left(-r^2/a^2\right)}{r^2}=$$
$$=-\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)\frac{r^2}{a^4}+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)\frac{r^4}{a^6}-\ldots,$$

$$b(r)=b_0+\left(i\widetilde{\alpha}+n\tilde{q}/a^2\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^mr^{2m}}{m!a^{2m}},\ \text{где}$$

$$b_0=i\widetilde{\alpha}(1-c_r)+\widetilde{\alpha}c_i+n\tilde{q}/a^2+\widetilde{\alpha}^2/Re^2,$$

$$U'r=-\frac{2r^2}{a^2}\exp\left(-r^2/a^2\right)=\frac{2r^2}{a^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}r^{2m}}{m!a^{2m}}..$$

В этом примере получаются бесконечные ряды.

Замечание. Для любого течения, у которого продольная компонента скорости U зависит от четной степени r, а тангенциальная компонента W зависит от нечетной степени r, функции b, β, χ, $U'r$ можно разложить в ряд вида (23).

Считая, что вихревое течение обладает вышеуказанным свойством, искомые функции Y(r), Q(r), F(r), P(r) также разложим в ряд по четным степеням радиальной координаты r:

$$\Phi = f_0 + f_1 r^2 + f_2 r^4 + \ldots + f_m r^{2m}, \quad (24)$$

$$\Theta = \theta_0 + \theta_1 r^2 + \theta_2 r^4 + \ldots + \theta_m r^{2m}, \quad (25)$$

$$\Psi = \psi_0 + \psi_1 r^2 + \psi_2 r^4 + \ldots + \psi_m r^{2m}, \quad (26)$$

$$\Pi = p_0 + p_1 r^2 + p_2 r^4 + \ldots + p_m r^{2m}. \quad (27)$$

Подставляя ряды (24)-(27) в уравнения (19)-(22) и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями r в обеих частях, получаем для коэффициентов ряда рекуррентные соотношения:

$$4m\left(m+|n|-1\right)\psi_m = \sum_{j=0}^{m-1}\left(b_j + i\tilde{q}\beta_j\right)\psi_{m-1-j} + i\tilde{q}\sum_{j=0}^{m-2}\chi_j\theta_{m-2-j} - p_{m-1}\left(m+|n|-1\right), \quad (26)$$

$$4\left(m-1\right)\left(m+|n|\right)\theta_m = \sum_{j=0}^{m-1}\left(b_j - i\tilde{q}\beta_j\right)\theta_{m-1-j} - i\tilde{q}\sum_{j=0}^{m-2}\chi_j\psi_{m-2-j} - p_{m-1}\left(m-1\right), \quad (27)$$

$$4m\left(m+|n|\right)f_m = \sum_{j=0}^{m-1}b_j f_{m-1-j} + i\sum_{j=0}^{m-2}u_j\left(\psi_{m-2-j} + \theta_{m-2-j}\right) + \frac{p_{m-1}\tilde{\alpha}}{\mathrm{Re}^2}, \quad (28)$$

$$2\left(m+|n|\right)\theta_m + 2m\psi_m = -\tilde{\alpha}f_{m-1}. \quad (29)$$

Эти соотношения, выполняющиеся при $m = 1,2,3\ldots$, позволяют выразить коэффициенты рядов с номером m через предыдущие коэффициенты с номерами от 0 до m-1. Если будут известны три «стартовых» коэффициента p_0, f_0, y_0, то остальные коэффициенты p_m, f_m, y_m, θ_m $m = 1,2,\ldots$ вычисляются из рекуррентных соотношений, тем самым, будут найдены все искомые функции. Значения трех «стартовых» коэффициентов вычисляются из трех граничных условий на стенке следующим образом. Зададим достаточно большое число членов ряда N. Подставляя $r = 1$ в (24), получаем

$$\Theta(1) = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_N, \quad \Phi(1) = f_1 + f_2 + \ldots + f_N.$$

Поскольку все коэффициенты определяются значениями p_0, f_0, y_0, а рекуррентные соотношения линейны, то значения $\Phi(1)$, $\Theta(1)$ являются линейными функциями трех переменных p_0, f_0, y_0:

$$\Theta(1) = A_2 p_0 + B_2 f_0 + D_2\psi_0,$$

$$\Phi(1) = A_1 p_0 + B_1 f_0 + D_1\psi_0$$

Неизвестные константы A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2 найдем следующим образом. Зададим $(p_0, f_0, \psi_0) = (0,0,1)$ и по рекуррентным формулам вычислим остальные коэффициенты рядов (24), (25). Тем самым мы получим значения $\Phi(1)$ и $\Theta(1)$, которые равны, соответственно D_1 и D_2. Если задать $(p_0, f_0, \psi_0) = (1,0,0)$, то вычисленные значения $\Phi(1)$ и $\Theta(1)$ равны A_1 и A_2. При $(p_0, f_0, \psi_0) = (0,1,0)$ значения $\Phi(1)$ и $\Theta(1)$ равны B_1 и B_2. Граничные условия $\Phi(1) = \Theta(1) = 0$ приводят к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} A_1 p_1 + B_1 f_1 + D_1\psi_0 &= 0 \\ A_2 p_1 + B_2 f_1 + D_2\psi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку искомые функции $\Psi(r)$, $\Theta(r)$, $\Phi(r)$, $P(r)$ определены с точностью до произвольного множителя, значение ψ_0 можно положить произвольной константой. Таким образом, из (30) находим

$$p_1 = \psi_0\left(D_2 B_1 - D_1 B_2\right)/\left(A_1 B_2 - A_2 B_1\right),$$

$$f_1 = \psi_0\left(A_2 D_1 - A_1 D_2\right)/\left(A_1 B_2 - A_2 B_1\right).$$

Остается выполнить последнее граничное условие на стенке

$$\Psi(1) = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_N = 0. \quad (31)$$

Условие (29) служит для вычисления собственного значения комплексной скорости $c = c_R + ic_i$, которая присутствует в рекуррентных соотношениях только через комплексную величину b_0. Условие (31) равносильно двум уравнениям

$$\Psi_R(c_R, c_I) = 0, \quad \Psi_I(c_R, c_I) = 0,, \quad (32)$$

где G_R и G_I - вещественная и мнимая части $\Psi(1)$. Система уравнений (32) решалась итерациями методом Ньютона-Рафсона.

Вычисление коэффициентов рядов из рекуррентных соотношений

Рекуррентные соотношения (26)-(29) при $m = 1$ имеют вид

$$4|n|\psi_1 = \left(b_0 + i\tilde{q}\beta_0\right)\psi_0 - p_0|n|,$$

$$0\cdot\theta_1 = \left(b_0 - i\tilde{q}\beta_0\right)\theta_0 - p_0\cdot 0,$$

$$4\left(1+|n|\right)f_1 = b_0 f_0 + p_0\tilde{\alpha}/\mathrm{Re}^2,$$

$$\left(1+|n|\right)\theta_1 + \psi_1 = -\tilde{\alpha}f_0/2.$$

Из второго равенства следует $q_0 = 0$, а из первого, третьего и четвертого равенств коэффициенты y_1, f_1, q_1 выражаются через «стартовые» значения y_0, f_0, q_0:

$$\psi_1 = \left(b_0 + i\tilde{q}\beta_0\right)\psi_0/4|n| - p_0/4,$$

$$f_1 = \left(b_0 f_0 + p_0\tilde{\alpha}/\mathrm{Re}^2\right)/4\left(1+|n|\right),$$

$$\theta_1 = -\left(\psi_1 + \tilde{\alpha}f_0/2\right)/\left(1+|n|\right).$$

Чтобы найти p_1, подставим $m=2$ в (26) и (27) и выразим

$$4\psi_2 = \frac{(b_0+i\tilde{q}\beta_0)\psi_1+(b_1+i\tilde{q}\beta_1)\psi_0}{2(1+|n|)} - p_1/2,$$

$$2(2+|n|)\theta_2 = \frac{(b_0-i\tilde{q}\beta_0)\theta_1 - i\tilde{q}\chi_0\psi_0}{2} - p_1/2.$$

Подставляя это в (29), получаем

$$p_1 = \frac{(b_0-i\tilde{q}\beta_0)\theta_1 - i\tilde{q}\chi_0\psi_0}{2} + \frac{(b_0+i\tilde{q}\beta_0)\psi_1+(b_1+i\tilde{q}\beta_1)\psi_0}{2(1+|n|)} + \tilde{\alpha}f_1$$

Таким образом, y_1, f_1, q_1, p_1 вычислены через «стартовые» значения p_0, f_0, y_0.

При $m \geq 2$ из соотношений (26)-(28) находим y_m, q_m, f_m:

$$\psi_m = \frac{\sum_{j=0}^{m-1}(b_j+i\tilde{q}\beta_j)\psi_{m-1-j} + i\tilde{q}\sum_{j=0}^{m-2}\chi_j\theta_{m-2-j}}{4m(m+|n|-1)} - \frac{p_{m-1}}{4m}, \quad (33)$$

$$\theta_m = \frac{\sum_{j=0}^{m-1}(b_j-i\tilde{q}\beta_j)\theta_{m-1-j} - i\tilde{q}\sum_{j=0}^{m-2}\chi_j\psi_{m-2-j}}{4(m-1)(m+|n|)} - \frac{p_{m-1}}{4(m+|n|)}. \quad (34)$$

$$f_m = \frac{1}{4m(m+|n|)}\left[p_{m-1}\tilde{\alpha}/\mathrm{Re}^2 + \sum_{j=0}^{m-1}b_j f_{m-1-j} + i\sum_{j=0}^{m-2}u_j(\psi_{m-2-j}+\theta_{m-2-j})\right], \quad (35)$$

Подставляя выражения для y_{m+1}, q_{m+1} в (29), находим p_m:

$$p_m = \frac{\sum_{j=0}^{m}(b_j-i\tilde{q}\beta_j)\theta_{m-j} - i\tilde{q}\sum_{j=0}^{m-1}\chi_j\psi_{m-1-j}}{2m} + \frac{\sum_{j=0}^{m}(b_j+i\tilde{q}\beta_j)\psi_{m-j} + i\tilde{q}\sum_{j=0}^{m-1}\chi_j\theta_{m-1-j}}{2(m+|n|)} + \tilde{\alpha}f_m.$$

Таким образом, при $m \geq 2$ коэффициенты $\psi_m, \theta_m, f_m, p_m$, выражаются через коэффициенты с предыдущими номерами.

ВЫВОДЫ

Разработан новый метод решения задачи устойчивости вихревого течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале, применимый для довольно широкого класса осесимметричных течений. Метод основан на разложении поля скорости невозмущенного потока, а также возмущения поля скорости в ряд по степеням радиальной координаты. Алгоритм решения сводится к итерационной процедуре, в которой коэффициенты ряда вычисляются из системы линейных алгебраических уравнений. Тем самым в задаче «на собственные значения» удается избежать трудностей, связанных с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений с особой точкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Численное моделирование вязких вихревых течений для технических приложений. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 176 с. Akhmetov V.K., Shkadov V.Ya. Numerical modeling of viscous vortex flows for technical applications. – M.: Publ. House of the Association of Civil Engineering High Schools, 2009. – 176 p.
2. Актершев С.П., Куйбин П.А. Устойчивость закрученного потока в цилиндрическом канале. – Современная наука: исследования, идей, результаты, технологии, 2012, № 2 (10), С. 79-84. Aktershev S.P., Kuibin P.A. Stability of the twirled flow in the cylindrical channel. – Modern science: researches, ideas, results, technologies, 2012, No. 2 (10), P. 79-84.
3. Aktershev S.P., Kuibin P.A. Stability of axisymmetric swirl flow of viscous incompressible fluid. Thermophysics and Aerodynamics. – 2013. – Vol. 20., Iss. 3. – P. 327-336.
4. Mackrodt P.A. Stability of Hagen-Poiseuille flow with superimposed rigid rotation // J. Fluid Mech. – 1976. – Vol. 73 – No. 1. – P. 153–164.
5. Fernandez-Feria R., Pino C. The onset of absolute instability of rotating Hagen-Poiseuille flow: A spatial stability analysis // Phys. Fluids. – 2002. – Vol. 14. – P. 3087–3097.

© Актершев С.П., Куйбин П.А.