УДК 532.5.032

ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИЙ НА ГИСТЕРЕЗИС КРАЕВОГО УГЛА СЖИМАЕМОЙ КАПЛИ

Алабужев А.А.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-31366).

АННОТАЦИЯ

Исследованы вынужденные колебания сжимаемой капли (пузырька), имеющего в равновесии форму цилиндра и ограниченного в осевом направлении двумя твердыми параллельными поверхностями, при действии осевых вибраций. Уравнение состояния газа описывалось политропным процессом. Влияние динамики контактной линии учитывалось с помощью эффективного граничного условия, допускающего гистерезис краевого угла. Ввиду диссипативного характера эффективного краевого условия существует устойчивый режим нелинейных колебаний. Однако, из-за сжимаемости возможно появление резонансов связанных с частотами собственных колебания сжимаемого пузырька. Получены данные об отклонении поверхности и частотных характеристиках в зависимости от постоянной Хокинга и характерного значения краевого угла.

ВВЕДЕНИЕ

Быстрое развитие микротехнологий за прошедшие несколько десятилетий привлекло большое внимание к исследованию динамики контактной линии. Многие процессы на практике связаны с растеканием жидкости на твердой подложке. Поэтому важно понять, как происходит смачивание подложки, растекание жидкости и научиться управлять движением контактной линии. Но, несмотря на существенный прогресс в понимании установившегося движения контактной линии [1-4], быстропеременное (пульсационное) движение контактной линии еще слабо изучено. Одной из важных проблем этой области является изучения влияния гистерезиса краевого угла на движение контактной линии.

В реальности при движении контактной линии по твердой подложке необходимо рассматривать их взаимодействие, т.е. учитывать процессы диссипации. При высокочастотном колебательном движении контактной линии влияние вязкости наиболее существенно в тонких пограничных слоях вблизи поверхностей раздела, а движение контактной линии в основном определяется быстро осциллирующим полем давления. Таким образом, исключая пограничные слои, можно рассматривать невязкое поведение жидкости в ядре, учитывая вязкость лишь внутри динамических пограничных слоев. Сложные процессы, происходящие в непосредственной близости линии контакта, из рассмотрения исключаются с помощью эффективных граничных условий, накладываемых на динамику видимого краевого угла.

В работах [5,6] использовано граничное условие, допускающее неоднозначную зависимость краевого угла от скорости движения контактной линии. Это условие предполагает, что малые отклонения краевого угла не приводят к движению контактной линии. Движение контактной линии возможно, если абсолютное значение краевого угла превысит некоторое критическое значение. Результаты экспериментальных работ [7,8] хорошо описываются данным краевым условием при малых отклонениях краевого угла. В работе [9] рассмотрено поведение полусферической капли жидкости на твердой подложке. Учитывался гистерезис краевого угла [6]: контактная линия могла двигаться, если значение краевого угла превышало критическое. Подложка свершала вертикаль-

ные вибрации. Полученное поведение капли в определенных случаях качественно совпадало с результатами экспериментов [10].

В работе [11] изучались колебания капли жидкости с закрепленной контактной линией на твердой подложке в поле тяжести. Задача решалась в линейной постановке, рассматривался произвольный равновесный краевой угол.

Таким образом, в большинстве теоретических моделей обычно рассматривают прямой равновесный краевой угол и не учитывают гистерезис краевого угла. В результате этого, остается не рассмотренным или не объясненным целый ряд явлений.

Целью данной работы является исследование движения контактной линии в более реалистичных условиях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим колебания капли сжимаемой жидкости (пузырька), окруженной другой несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_e^*. Здесь и в дальнейшем величины с индексом i относятся к капле, e - окружающей жидкости. Вся система ограничена двумя параллельными твердыми плоскостями (рис. 1). Сосуд имеет свободную поверхность на расстоянии R_0. В отсутствие внешних сил капля имеет форму цилиндра радиусом R. Краевой угол между боковой поверхностью капли и твердыми плоскостями в равновесии равен $\pi/2$. Расстояние между ограничивающими поверхностями равно h. На систему действует внешнее звуковое поле и внешняя вибрационная сила с амплитудой A и частотой ω^*, направленная параллельно твердым плоскостям.

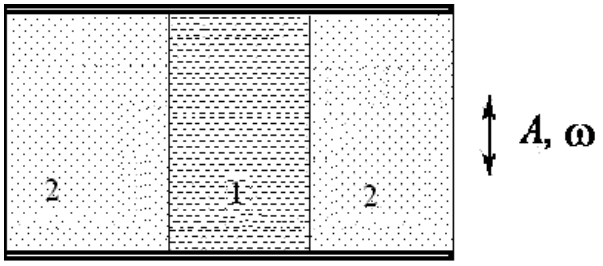

Рис.1 Геометрия задачи.

Характерная амплитуда колебаний капли A^* мала по сравнению с равновесным радиусом R. Будем предполагать, что, с одной стороны, основная частота колебаний ω^* достаточно велика, чтобы можно было пренебречь вязкостью, с другой стороны, частоты вибраций достаточно малы, чтобы можно было пользоваться приближением несжимаемости: $\delta = \sqrt{\nu/\omega^*} << R$ и $\omega^* R << c$, где c – скорость звука, ν - кинематическая вязкость. Например, для капли воды радиуса 10^{-2} м частоты ω^*, удовлетворяющие указанным требованиям, лежат в широком диапазоне от 0.1 до 100 Гц. Наименьшая частота собственных колебаний свободного водяного столба, окруженного жидкостью схожих параметров, ω^* □ 10 Гц.

Удобно использовать цилиндрическую систему координат (r^*, α, z^*), в которой поверхность капли будет описываться соотношением: $r^* = R + \zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$, где $\zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$ - отклонение поверхности от равновесного положения, угол α отсчитывается от оси x, которой параллельно направление внешней вибрационной силы.

Выберем в качестве единиц измерения времени t_0, радиальной координаты R, осевой координаты h, отклонения поверхности A^*, скорости v_0, плотности ρ_e^*, давления p_0, где $t_0 = \sqrt{\rho_e^* R^3/\sigma}$, $v_0 = A^*\sqrt{\sigma/\rho_i^* R^3}$, $p_0 = A^*\sigma/R^2$, σ - коэффициент поверхностного натяжения.

$$p_e = -\left(\varphi_t + \omega^2(1-z)\cos\omega t\right),\ \Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &r = 1 + \varepsilon\zeta : [\varphi_n] = 0,\ \varepsilon[p] = -\operatorname{div}\vec{n}, \\ &\zeta_t = \nabla\varphi\cdot\nabla F, \end{aligned} \tag{2}$$

$$z = \mp 1/2 :\quad \varphi_z = 0, \tag{3}$$

$$z = \mp 1/2,\ r = 1 + \varepsilon\zeta : \zeta_t = \begin{cases} \lambda(\gamma - \gamma_0), & \gamma > \gamma_0 \\ 0, & |\gamma| < \gamma_0 \\ \lambda(\gamma + \gamma_0), & \gamma < -\gamma_0 \end{cases} \tag{4}$$

$$r = R_0 :\quad \varphi = 0. \tag{5}$$

Краевая задача - содержит следующие безразмерные параметры: малую относительную характерную амплитуду $\varepsilon = A^*/R$, капиллярный параметр

$$\lambda = \Lambda\Big/\sqrt{\rho_i^* R^3 h^2/\sigma},$$

геометрический параметр $b = R/h$, радиус сосуда $R_0 = R_0^*/r_0$, давление газа в пузырьке $P_0 = 2n_p P_g r_0/\sigma$, n_p – показатель политропы.

<<

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Несмотря на то, что граничное условие (4) делает задачу (1)-(5) нелинейной, решения для функций φ, p, ζ можно представить в виде рядов (см. [9,12,13]):

$$\varphi = a(t)\left(\ln(R_0) - \ln(r)\right) + \varphi_e + \varphi_o, \quad (6)$$

$$\varphi_e = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(t)e^{-R_0}\mathrm{I}_{ek}(r) + b_k(t)\mathrm{K}_{ek}(\mathrm{r})\right)C_k(z),$$

$$\varphi_o = \sum_{k=0}^{\infty}\left(q_k(t)e^{-R_0}\mathrm{I}_{ok}(r) + s_k(t)\mathrm{K}_{ok}(r)\right)S_k(z),$$

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(t)\cos 2k\pi z + \sum_{k=0}^{\infty}h_k(t)\sin(2k+1)\pi z, \quad (7)$$

$$p_i = -P_0\langle\zeta\rangle,\ p_e = -\rho_e\left(\varphi_{et} + \omega^2(1-z)\cos\omega t\right),$$

$$\mathrm{I}_{ek}(r) = \mathrm{I}_0(2k\pi br),\ \mathrm{K}_{ek}(\mathrm{r}) = \mathrm{K}_0(2k\pi br),$$

$$C_k(z)\cos 2k\pi z,\ \mathrm{I}_{ok}(r) = \mathrm{I}_0\left((2k+1)\pi br\right),$$

$$\mathrm{K}_{ok}(r) = \mathrm{K}_0\left((2k+1)\pi br\right),\ S_k(z) = \sin(2k+1)\pi z,$$

$$a_0 = -c_{0t},\ a_k e^{-R_0} = -\frac{c_{kt} + d_1 f_{1kt}}{A'_{1k}},$$

$$q_k e^{-R_0} = -\frac{h_{kt} + d_2 f_{2kt}}{A'_{2k}},\ b_k(t) = -a_k(t)e^{-R_0}\frac{\mathrm{I}_{ek}(R_0)}{\mathrm{K}_{ek}(R_0)},$$

$$s_k(t) = -q_k(t)e^{-R_0}\frac{\mathrm{I}_{ok}(R_0)}{\mathrm{K}_{ok}(R_0)}.$$

где $k = 0,1,2,...$ – волновое число, I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя, нижний индекс r обозначает производную по радиусу r.

С другой стороны, используя условие баланса нормальных напряжений (2), решение для отклонения поверхности ζ можно представить в виде

$$\zeta = c_{tt}\ln(R_0) + (P_0 - 1)c - \omega^2\cos\omega t + \zeta_e + \zeta_o, \quad (8)$$

$$\zeta_e = \frac{b\gamma}{\sin(0,5\beta)}\cos(\beta z) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{ktt}}{\Omega_{1k}^2}C_k(z),$$

$$\zeta_o = \frac{b\gamma}{\cos(0,5\beta)}\sin(\beta z) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{h_{ktt}}{\Omega_{2k}^2} + \frac{\omega^2 g_k\cos\omega t}{1-(2k+1)^2\pi^2 b^2}\right)S_k(z)$$

Здесь $g_k = \left(2(-1)^k\right)\Big/\left((2k+1)^2\pi^2\right)$ – коэффициента разложения в ряд Фурье функции z по базисным функциям $\sin\left((2k+1)\pi z\right)$, Ω_k – частоты собственных колебаний цилиндрического пузырька с нулевым азимутальным числом:

$$\Omega_{1k}^2 = \frac{4\pi^2 b^2 k^2 - 1}{A_{1k}}A'_{1k},\ \Omega_{2k}^2 = \frac{(2\pi+1)^2 b^2 k^2 - 1}{A_{1k}}A'_{1k},$$

$$\mathrm{A}_{1k} = -\mathrm{I}_{ek}(1) + \mathrm{K}_{ek}(1)\frac{\mathrm{I}_{ek}(R_0)}{\mathrm{K}_{ek}(R_0)},$$

$$\mathrm{A}'_{1k} = -\mathrm{I}_{ekr}(r) + \mathrm{K}_{ekr}(r)\frac{\mathrm{I}_{ek}(R_0)}{\mathrm{K}_{ek}(R_0)}\bigg|_{r=1},$$

$$\mathrm{A}_{2k} = -\mathrm{I}_{ok}(1) + \mathrm{K}_{ok}(1)\frac{\mathrm{I}_{ok}(R_0)}{\mathrm{K}_{ok}(R_0)},$$

$$\mathrm{A}'_{2k} = -\mathrm{I}_{okr}(r) + \mathrm{K}_{okr}(r)\frac{\mathrm{I}_{ok}(R_0)}{\mathrm{K}_{ok}(R_0)}\bigg|_{r=1}.$$

Сравнивая решения (7) и (8) для ζ, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных амплитуд $c_k(t)$ и $h_k(t)$:

$$c_{tt}\ln(R_0) + (P_0 - 1)c - \omega^2\cos\omega t = 0 \quad (9)$$

$$c_{ktt} + \Omega_{1k}^2 c_k = -\Omega_{1k}^2 F_{1k}\gamma, \quad (10)$$

$$h_{ktt} + \Omega_{2k}^2 h_k = \Omega_{2k}^2 F_{2k}\gamma - \Omega_{2k}^2 L_k\cos\omega t \quad (11)$$

где введены следующие обозначения:

$$F_{1k} = bf_{1k}\operatorname{cosec}(0,5\beta),\ F_{2k} = bf_{2k}\operatorname{ces}(0,5\beta),$$

$$L_k = \frac{\omega^2 g_k}{(2k+1)^2\pi^2 b^2 - 1},\ f_{10} = 2b\sin(0,5\beta),$$

$$f_{1k} = \frac{4b(-1)^k}{4k^2\pi^2 b^2 - 1}\sin(0,5\beta),$$

$$f_{2k} = \frac{4b(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2 b^2 - 1}\cos(0,5\beta),$$

f_{1k} – коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\cos(z/b)$ по базисным функциям $\cos(2k\pi z)$, f_{2k} – коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\sin(z/b)$ по базисным функциям $\sin\left((2k+1)\pi z\right)$. Уравнение (10) необходимо решать совместно с (4). Отметим, что ряд для функции ζ сходится очень медленно. Однако значения частот Ω_k собственных колебаний растет довольно быстро (см. [12]), поэтому, начиная с некоторого k, возможно пренебречь первым слагаемым в левой части уравнения (10) по сравнению с остальными, т.е. $c_k \approx -S_{1k}\gamma$ и $h_k \approx S_{2k}\gamma - L_k\cos\omega t$. Из полученных уравнений следует, что линейные осесимметричные вибрации не могут возбудить колебания объемной моды для цилиндрического пузырька, т.е. сжимаемость пузырька не важна для такого внешнего воздействия в отличие от полусферического пузырька [13]. Таким обра-

зом, используя конечную сумму и решение (7), получим

$$\zeta_t = \sum_{k=0}^{N} c_{kt} C_k(z) + \sum_{k=0}^{N} D_{kt} S_k(z), \qquad (12)$$

где $D_k = h_k + S_{2k}\gamma - L_k \cos(\omega t)$. Подставляя (12) в условие (4), получим уравнение для λ:

$$\gamma_t = c_{0t} - \omega \sin(\omega t) - \frac{\sum_{k=1}^{N} (-1)^k c_{kt} + \Gamma}{\sum_{k=1}^{N} (-1)^k F_{1k}} - \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} (-1)^k F_{2k}} \left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k H_{kt} + \Gamma \right), \qquad (13)$$

$$H_k = h_k + L_k \cos(\omega t), \quad \Gamma = \begin{cases} \lambda(\gamma - \gamma_0), & \gamma > \gamma_0 \\ 0, & |\gamma| < \gamma_0 \\ \lambda(\gamma + \gamma_0), & \gamma < -\gamma_0 \end{cases}.$$

Система уравнений (10), (13) решалась с помощью метода Гира.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Граничное условие Хокинга (4) показывает, что контактная линия будет неподвижной, если значение краевого угла не превышает некоторого критического значения. В противном случае, контактная линия движется. На рисунке 2 показаны зоны, в которых контактная линия движется или покоится.

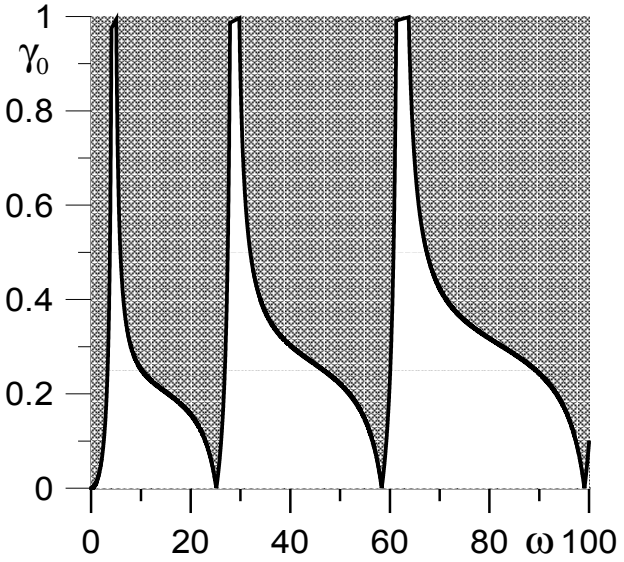

Рис.2 Области движения контактной линии капли на плоскости (ω, γ_0). $\rho_i = 0.3$, $b = 1$, в закрашенных областях контактная линия неподвижна.

На рисунке 3 приведена эволюция краевого угла и максимальное отклонение контактной линии для случаев движущейся контактной линии и неподвижной, соответственно.

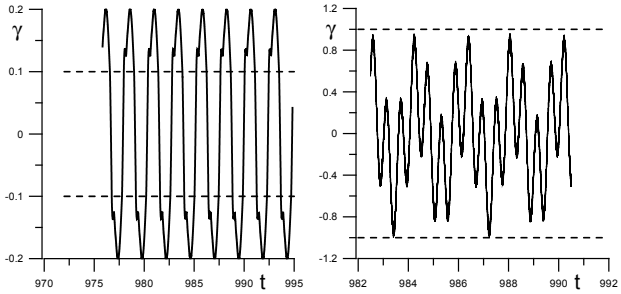

Рис.3 Эволюция отклонения краевого угла и контактной линии капли ($\omega = 3.3, \lambda = 3, b = 1$).

Из приведенных графиков видно, что в первом случае отклонение краевого угла имеет периодический режим, тогда как для закрепленной контактной линии такого режима нет. Как уже отмечалось выше, используемые ряды сходятся медленно и необходимо удерживать большое число слагаемых, что показано для максимального отклонения линии контакта во втором случае. Не смотря на то, что контактная линия должна быть неподвижной, в численно счете имеется небольшое движения, что связано с недостаточным числом слагаемых в ряде.

На рисунках 4-5 приведена зависимость амплитуды колебаний от частоты внешнего воздействия для разных значений капиллярного параметра и критического значения краевого

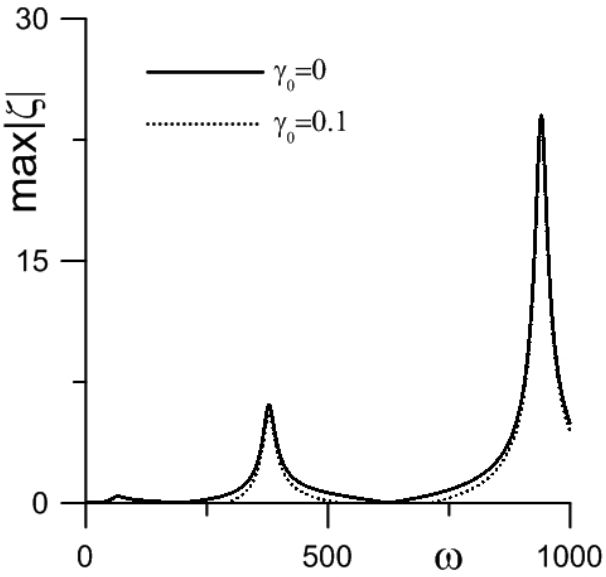

Рис.4 Максимальное отклонение контактной линии пузырька при $\lambda = 3, R_0 = 5, P_0 = 5$.

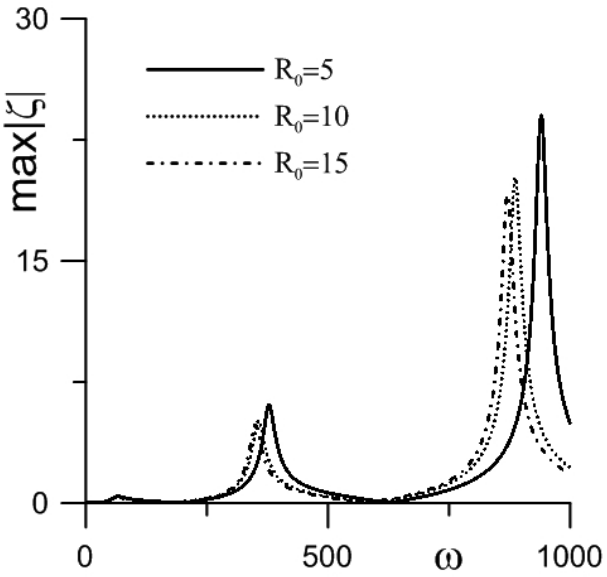

Рис.5 Максимальное отклонение контактной линии для пузырька при $\lambda = 3, \gamma_0 = 0$, $P_0 = 50$.

угла. Ранее найдено, что в отсутствие гистерезиса существуют частоты внешнего воздействия, при которых контактная линия не движется. При наличии гистерезиса контактная линия не движется уже в некотором интервале частот. При увеличении характерного значения краевого угла время, в течение которого контактная линия не движется, растет, а интервал частот, в котором она находится в движении, сужается. Для сжимаемой капли (пузырька) возникает дополнительное явление резонанса, связанное с модой объемных колебаний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы вынужденные колебания сжимаемой капли, имеющей в равновесии форму цилиндра и ограниченного в осевом направлении двумя твердыми параллельными поверхностями, при действии осевых вибраций. Уравнение состояния газа описывалось политропным процессом.

Влияние динамики контактной линии учитывалось с помощью эффективного граничного условия, допускающего гистерезис краевого угла. Линейные осесимметричные вибрации не могут возбудить колебания объемной моды для цилиндрического пузырька, т.е. сжимаемость пузырька не важна для такого внешнего воздействия в отличие от полусферического пузырька. Это связано с тем, что такие вибрации возбуждают нечетные моды (четность относительно вертикальной оси z), мода объемных колебаний – четная. Поэтому для возбуждения объемных колебаний необходимо воздействовать внешним акустическим полем. Ввиду диссипативного характера эффективного краевого условия существует устойчивый режим нелинейных колебаний. Взаимодействие объемной моды собственных колебаний с остальными модами происходит вследствие движения контактной линии. Однако, из-за сжимаемости возможно появление резонансов связанных с частотами собственных колебания формы сжимаемого пузырька. Получены данные об отклонении поверхности и частотных характеристиках в зависимости от постоянной Хокинга и характерного значения краевого угла. Ранее установлено, что в отсутствие гистерезиса существуют частоты внешнего воздействия, при которых контактная линия не движется. При наличии гистерезиса контактная линия не движется уже в некотором интервале частот. При увеличении характерного значения краевого угла время, в течение которого контактная линия не движется, растет, а интервал частот, в котором она находится в движении, сужается. При больших значениях постоянной Хокинга, когда контактная линия слабо взаимодействует с подложкой и диссипация мала, возможно существование параметрической неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. де Жен, П.Ж. Смачивание: статика и динамика / П.Ж. де Жен, // УФН – 1987. – Т. 151, вып. 4. – С. 619-681. De Gennes, P.G. (1985). "Wetting: Statics and Dynamics", *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 57, pp. 827-863.
2. Leger, L. and Joanny, J.F. (1992). "Liquid spreading", *Rep. Prog. Phys.*, Vol. 55, pp. 431-486.
3. Rauscher, M. and Dietrich, S. (2008). "Wetting phenomena in nanofluidics", *Annu. Rev. Mater. Res.*, Vol. 38, pp. 143-172.
4. Воинов О.В. Гидродинамика смачивания / О.В. Воинов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1976. – № 5. – С. 76-84 Voinov, O.V. (1976). "Hydrodynamics of wetting", *Fluid Dyn.*, Vol. 11, pp. 714-721.
5. Young, G.W. and Davis, S.H. (1987). "A plate oscillating across a liquid interface: effect of contact-angle hysteresis", *J. Fluid Mech.*, Vol. 174, pp. 187-200.
6. Hocking, L.M. (1987). "Waves produced by a vertically oscillating plate", *J. Fluid Mech.*, Vol. 179, pp. 267-281.
7. Ablett, R. (1923). "An investigation of the angle of contact between paraffin wax and water", *Phil. Mag.*, Vol. 46, pp. 244-256.
8. Dussan, V.E.B. (1979). "On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 11, pp. 371-400.
9. Fayzrakhmanova, I. and Straube, A. (2009). "Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop", *Phys. Fluids*, Vol. 21, 072104.
10. Daniel, S., Sircar, S., Gliem, J. and Chaudhury, M. K. (2002). "Rectified motion of liquid drops on gradient surfaces induced by vibration", *Langmuir*, Vol. 18, 3404.
11. Ilyukhina, M.A. and Makov, Yu.N. (2009). "Analysis of shape pertubations of a drop on a vibrating substrate for different wetting angles", *Acoustical Physics*, Vol. 55, no 6, pp. 722–728.
12. Алабужев А.А. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли / А.А. Алабужев, Д.В. Любимов // ПМТФ – 2007 – Т. 48, № 5. – С. 78-86. Alabuzhev, A.A. and Lyubimov, D.V. (2012). "Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, Vol. 48, Issue 5, pp. 686-693.
13. Fayzrakhmanova, I., Straube, A. and Shklyaev, S. (2011). "Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis", *Phys. Fluids*, Vol. 23, 102105.