УДК 532.51

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ И ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ГАЗА В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (В.Е. Захаров – ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет»).

АННОТАЦИЯ

Рассматривается течение пленки жидкости, увлекаемой турбулентным потоком газа. Влиянием гравитации пренебрегаем. Скорость жидкости значительно меньше характерной скорости газа, поэтому для газовой части задачи поверхность раздела считается жесткой и неподвижной. Вследствие малости толщины пленки, возмущения скорости газа, вызванные неровностью поверхности раздела, считаются линейными. В этом случае отдельно вычисляются нормальные и касательные напряжения газа на поверхности, представленной лишь одной пространственной гармоникой. В дальнейшем, моделирование динамики нелинейных волн на пленке жидкости ведется в известном поле напряжений на границе раздела фаз. В приближении длинноволновости возмущений границы раздела при умеренных числах Рейнольдса жидкости используется модельная система уравнений, из которой в случае малых чисел Рейнольдса жидкости получается одно эволюционное уравнение на отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Целью работы является исследование этого модельного уравнения.

ВВЕДЕНИЕ

Совместное течение жидкости и газа - классическая задача гидродинамики. Применительно к проблемам теплофизики и химической технологии часто имеет место турбулентное течение газа над тонким, покрытым волнами слоем жидкости. Решение этой проблемы в полной сопряженной постановке связано со значительными вычислительными трудностями, поэтому зачастую разделяют два этапа моделирования: определение напряжений газа на поверхности пленки и последующий расчет эволюции волн в жидкости. Так как скорость жидкости значительно меньше характерной скорости газа, при рассмотрении газовой части задачи, поверхность раздела можно считать жесткой и неподвижной. Кроме того, вследствие малости толщины пленки, возмущения скорости газа, вызванные неровностью поверхности раздела, можно полагать линейными. В этом случае, представление возмущения межфазной границы в виде суммы ряда Фурье позволяет свести задачу вычисления нормальных и касательных напряжений газа на поверхности к рассмотрению лишь одной пространственной гармоники (см, например [1]) .

В данной работе рассматривается второй этап исследования совместного течения - моделирование динамики нелинейных волн на горизонтальной пленке жидкости в известном поле напряжений на границе раздела фаз. Действием силы тяжести пренебрегаем. Течение газа является турбулентным и происходит в достаточно широком канале, поэтому продольным перепадом давления будем пренебрегать. Постановка задачи для жидкости включает уравнения Навье - Стокса и неразрывности с соответствующими кинематическими и динамическими граничными условиями. Одной из проблем данной задачи является то, что, вследствие подвижности границы ее положение заранее неизвестно.

© Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г.

Используя приближение длинноволновости возмущений границы раздела, при умеренных числах Рейнольдса жидкости, удается получить модельную систему уравнений, описывающую эволюцию, в которой проблема свободной границы в определенном смысле решена [2]. В случае малых чисел Рейнольдса жидкости из этой системы получается одно эволюционное уравнение на отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Целью работы является исследование этого модельного уравнения.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Если функция $y = h(x,t)$, определяющая положение точек границы области является однозначной, то существует непрерывно дифференцируемое преобразование координат, переводящее область течения жидкости в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \quad \eta = y / h(x,t) \quad t = t \tag{1}$$

Здесь $h(x,t)$ – мгновенная толщина пленки.

Для случая пленки, стекающей по вертикальной плоскости в поле тяжести, преобразование (1) было выполнено в работе [2]. При этом уравнения движения жидкости были записаны в тензорной, инвариантной относительно систем координат, форме. Задача рассматривалась в приближении длинноволновых возмущений. В отсутствии силы тяжести в этом приближении в безразмерной постановке она принимает вид [3]:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Psi_\eta{}^2}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\Psi_\eta(\Psi_x + \eta h_t)}{h}\right) - \frac{1}{\varepsilon \operatorname{Re} h^2}\frac{\partial^3\Psi}{\partial\eta^3} = \frac{(3 - 1.5T_0)h}{\varepsilon \operatorname{Re}} +$$

$$+ We\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) - \frac{h}{Fr}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h}{\operatorname{Re}}\int_{-\infty}^{\infty} ikP(k)\hat{h}(k,t)e^{ikx}dk \tag{2}$$

Здесь $\Psi(x,\eta,t)$ – функция, аналогичная гидродинамической функции тока

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = hu, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = -hv - \eta\frac{\partial h}{\partial t},$$

которая обеспечивает тождественное выполнение уравнения неразрывности в координатах (1); u, v – контрвариантные компоненты скорости; Re, We, Fr – числа Рейнольдса, Вебера и Фруда, соответственно, ε – параметр длинноволновости.

На гиперповерхности $\eta = 0$ справедливы условия прилипания:

$$\Psi(x,0,t) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}(x,0,t) = 0 \tag{3}$$

На гиперповерхности $\eta = 1$ выполняются условие непротекания и динамические граничные условия, соответственно:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,1,t) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}(x,1,t) = h^2\left(T_0 + \int_{-\infty}^{\infty} T(k)\hat{h}(k,t)\,e^{ikx}dk\right) \tag{5}$$

Характерные масштабы выбирались так, чтобы для безволнового течения $h = 1$ и $\Psi(1) = 1$.

В задаче (2) – (5) T_0 – невозмущенная составляющая касательных напряжений газа на поверхности пленки, $T(k)$, $P(k)$ – Фурье-компоненты касательных напряжений и пульсаций давления газа, обусловленные криволинейностью границы раздела, $\hat{h}(k,t)$ – Фурье-разложение формы поверхности:

$$\hat{h}(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,t)\,e^{-ikx}dx$$

В случае малых чисел Рейнольдса, вследствие малости толщины пленки по сравнению с длиной волны, функция тока Ψ представляется в виде ряда по малому параметру ε:

$$\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1 + \cdots \tag{6}$$

Ограничиваясь в (6) двумя первыми членами, после подстановки полученных для них выражений в граничное условие (4), получается эволюционное уравнение для толщины пленки [3]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 2h\frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{3}We\varepsilon^2 \operatorname{Re}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} +\right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} T(k)k\hat{h}(k,t)\,e^{ikx}dk\right) = 0 \tag{7}$$

Если ограничиться исследованием возмущений малой, но конечной амплитуды, и ввести в рассмотрение медленное и быстрое времена, то с помощью преобразования:

$$h = 1 + \varepsilon h_1, \qquad t_0 = t, \qquad t_1 = \varepsilon t$$

из уравнения (7) получаем:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_0} + 2\frac{\partial h_1}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_1} + 2h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\mathrm{Re}We\varepsilon^2}{3} \frac{\partial^4 h_1}{\partial x^4} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T(k) ik^2 \hat{h}_1(k,t) e^{ikx} dk = 0 \qquad (9)$$

Из уравнения (8) следует, что в первом приближении (на быстрых временах) малые возмущения распространяются с удвоенной характерной скоростью. Для такого сдвигового течения (течение Куэтта) это есть скорость на поверхности. Таким образом, в этом приближении возмущения двигаются со скоростью течения невозмущенной плоской поверхности. Причем на этих временах движение происходит без изменения начальной формы возмущений.

Уравнение (9) описывает нелинейную эволюцию возмущений на больших временах.

С помощью замены:

$$\tau = bt_1, \qquad h_1 = bH, \qquad b = \mathrm{Re}We\varepsilon^2 / 3$$

оно перепишется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + B \int_{-\infty}^{\infty} T(k) ik^2 \hat{H}(k,t) e^{ikx} dk = 0 \qquad (10)$$

Здесь $B = 1/2b$.

Если рассмотреть случай бесконечно малых возмущений, то, пренебрегая нелинейным членом в (10) и представляя его решения в виде:

$$H = \exp(ik(x - c\tau)) \qquad (11)$$

придем к следующему дисперсионному соотношению:

$$c = -ik^3 + BkT(k) \qquad (12)$$

Возмущения вида (11) будут неустойчивы, если мнимая часть фазовой скорости c будет больше нуля. Из (12) видно, что это может быть обеспечено только возмущениями трения на границе раздела пленка – газ (интегральное слагаемое в (10)).

Пусть k_n – нейтральное волновое число, если таких чисел несколько, то пусть это будет наибольшее из волновых чисел. Выберем малый параметр ε так, чтобы $k_n = 1$. Используя то, что для нейтрального возмущения мнимая часть фазовой скорости $c_i = 0$, из соотношения (12) получаем условие на B:

$$B = T_i(1)^{-1}$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Для нахождения периодических по x решений уравнения (10) функция H представляется в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x,\tau) = \sum_n H_n(\tau) \exp(iknx) \qquad (13)$$

Так как H ¾ вещественная функция, то $\overline{H}_{-n} = H_n$. Черта означает операцию комплексного сопряжения.

После подстановки (13) в уравнение (10) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на Фурье-гармоники $H_n(\tau)$. Полагая, что все $H_n(\tau)$ с индексами $|n| \geq N$ равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу.

При исследовании эволюции периодических возмущений в качестве условия нормировки будем полагать, что среднее отклонение толщины от невозмущенного уровня равно нулю.

Уравнение (10) является интересным примером модельных уравнений, возникающих при исследовании эволюции возмущений в активно-диссипативных средах. За неустойчивость отвечает член, содержащий интеграл, а диссипацию обеспечивает четвертая производная. Будем использовать данные по пульсациям трения, полученные в работе [1]. Там представлены значения вещественной и мнимой частей амплитуды пульсаций трения на волнистой твердой стенке в зависимости от безразмерного волнового числа стенки $k_g = \delta k = k\nu / \nu^*$. Где δ - толщина ламинарного пограничного слоя в газе, ν - коэффициент кинематической вязкости газа, ν^* - динамическая скорость в газе. При расчетах использовалась модель Бенджамина (см. [1]).

В этом случае область неустойчивых волновых чисел k лежит в интервале $0 \div 1$. В этом смысле ситуация аналогична той, которая имеет место для широко известного уравнения Курамото-Сивашинского (К-С). У уравнение К-С есть счетное множество стационарно-бегущих решений. Известно, что эволюционное поведение периодических решений этого уравнения существенно зависит от того, сколько имеется стационарно-бегущих решений с данным волновым числом (см., например [4]). Так как интервалы неустойчивых волновых чисел у уравнений К-С и (10) одинаковы ($k \in 0 \div 1$), то

можно ожидать, что и у уравнения (10) структура стационарно-бегущих решений тоже не тривиальна. Понимание этого позволяет разобраться в поведении некоторых типичных сценариев эволюции решений уравнения (10).

Наиболее проста и понятна эволюция возмущений в той области волновых чисел, где существует только одно стационарно–бегущее семейство решений. В этом случае все начальные возмущения эволюционируют к соответствующему стационарно–бегущему решению. Пример такого развития возмущений показан на рис. 1. Здесь волновое число $k = 0{,}8$. На рис. 1 представлена зависимость модулей первых трех гармоник от времени.

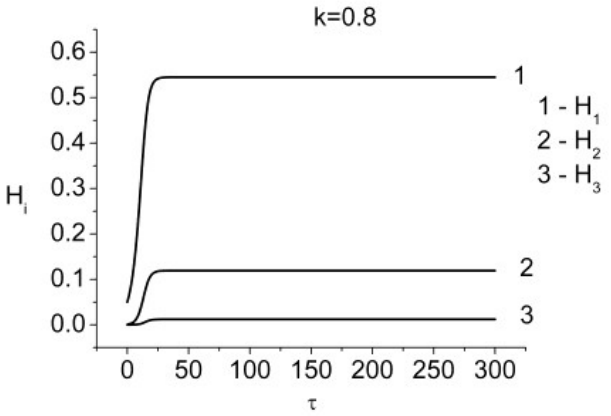

Рис.1 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени.

Как видно из рис. 1, модули всех трех гармоник быстро выходят на стационарные значения, причем первая гармоника является преобладающей.

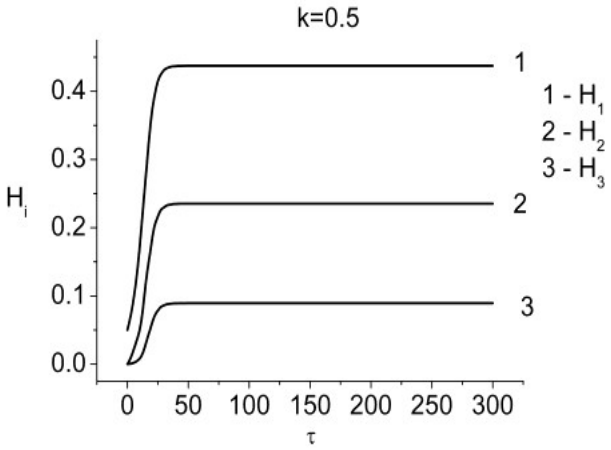

Рис.2 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени.

Поэтому установившийся стационарно–бегущий режим представляет собой практически чистую синусоиду. Такое поведение гармоник обусловлено тем, что только первая из них лежит в области неустойчивости. Уже вторая гармоника расположена достаточно далеко от границы этой области, поэтому у нее и более высоких гармоник линейное затухание велико. Нелинейные эффекты, обусловленные квадратичной нелинейностью (второе слагаемое в уравнении (10)), приводят к тому, что в результате между гармониками устанавливается такой баланс, что модуль первой гармоники существенно больше, чем у всех остальных гармоник.

На рис. 2, 3 показан пример развития возмущения с волновым числом $k = 0{,}5$. Здесь решение также притягивается к стационарно–бегущей волне, но, в отличие от первого примера, и вторая и третья гармоники соизмеримы с первой. В этом случае вторая гармоника лежит на границе неустойчивости, и нелинейные эффекты, при выходе на стационар, обеспечивает ее модулю достаточно большую величину. В свою очередь это приводит к тому, что и более высокие гармоники, хотя их волновые числа лежат по-прежнему в области линейной устойчивости, так же достигают больших установившихся значений. Поэтому, как видно из рис. 3, установившаяся волна существенно несинусоидальна. Здесь для трех различных моментов времени показаны профили волн. По оси абсцисс отложены две длины волны ¾ $2\lambda\ (\lambda = 2\pi / k)$.

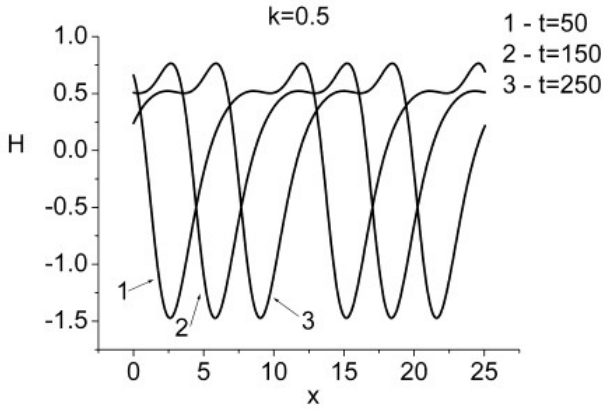

Рис.3 Профили волн для трех различных моментов времени.

Результаты, представленные на рис. 1-3 получены при значении параметра $B = 0{,}222$. В этом случае для нейтрального волнового числа $k_g = 0{,}025$ (см. [3]).

При дальнейшем продвижении вглубь области неустойчивости, когда волновые числа $k < 0{,}5$, проявляется сильный разброс в эволюционном поведении нестационарных решений. Небольшое изменение начальных данных приводит к существенному изменению в их дальнейшем развитии. Это обусловлено тем, что с уменьшением волнового числа, растет как число неустойчивых (в линейном смысле) гармоник, так и число стационарно-бегущих решений, к которым может проэволюционировать рассматриваемое нестационарное решение.

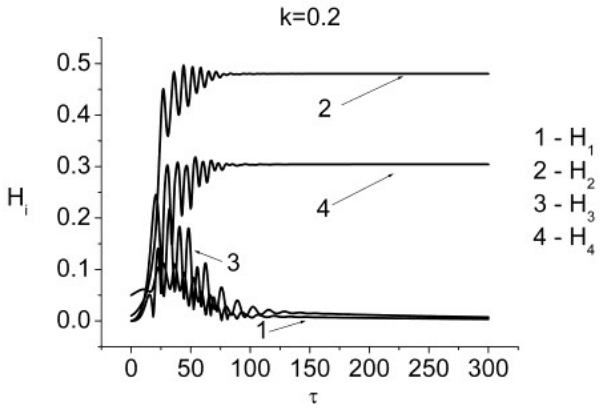

Рис.4 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени.

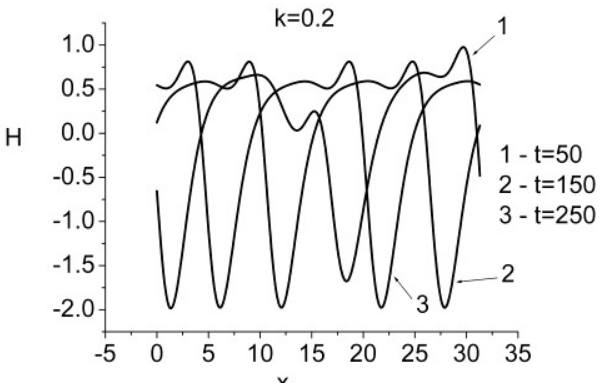

Рис.5 Профили волн для трех различных моментов времени.

Вышесказанное иллюстрируют два примера развития начальных возмущений с волновым числом $k = 0{,}2$. Здесь B=0,13, $k_g = 0{,}001$. В них в начальный момент задавались одинаковыми первая гармоника: H_{1r}=0,05, $H_{1i} = 0$ и модули второй гармоники. Отличие заключалось в их фазовом сдвиге. Для решения, представленного на рис. 4, 5, в начальный момент H_{1r}=0,01, $H_{2i} = 0$, а на рис. 6, 7 – $H_{2r} = 0$, H_{2i}=0,01. В обоих случаях решение проэволюционировало к некоторому стационарно–бегущему решению. Но, это два разных решения, существенно различающиеся между собой. В первом случае (рис. 4, 5) на больших временах доминирует 2-я гармоника, поэтому на рис. 5 на этих временах на длине волны наблюдается два основных экстремума (см. кривые 2, 3).

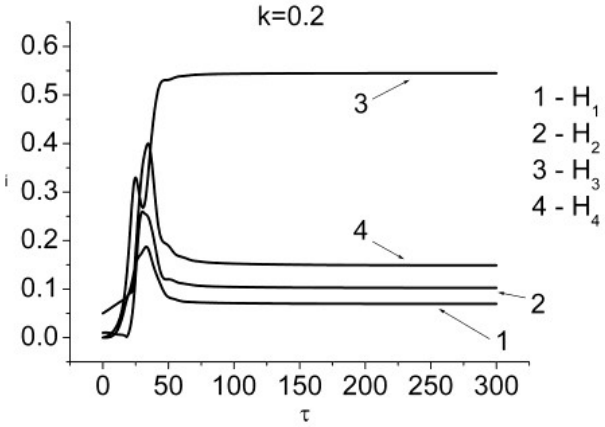

Рис.6 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени.

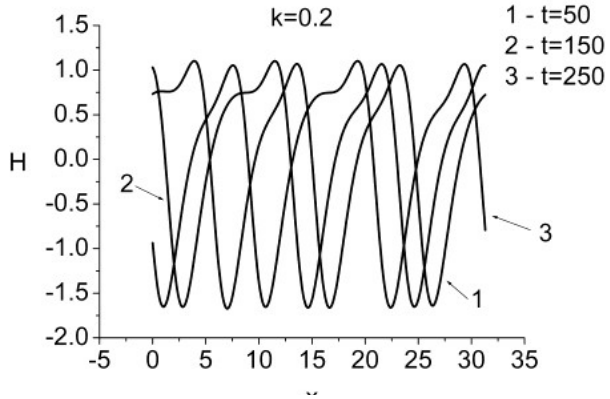

Рис.7 Профили волн для трех различных моментов времени.

Во втором примере (рис. 6, 7) решение быстрее притягивается к стационарно–бегущему решению (за время τ~60). При этом преобладающей становиться третья гармоника, и на длине волны наблюдается три основных экстремума (см. рис. 7). На рис. 5, 7 по оси x представлена одна длина волны начального возмущения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В случае малых чисел Рейнольдса моделирование динамики длинноволновых возмущений на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости, находящегося в условиях невесомости и увлекаемого газовым потоком, сводится к исследованию одного эволюционного уравнения на отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Это уравнение в некотором смысле аналогично уравнению Курамото - Сивашинского (Непомнящего), но, в отличие от последнего, содержит член с интегральной накачкой.
- Проведено исследование периодических решений данного уравнения. Найдено несколько типичных сценариев эволюции таких решений. В частности, показано, что в ряде случаев они притягиваются к стационарно – бегущим решениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alekseenko S.V., Arkhipov D.G., Tsvelodub O.Yu. Modelling of the shear stresses produced by the turbulent gas flow over the wavy liquid film // Fortschritt-Berichte, VDI. –2007. – Vol. 3. – N 883. – P. 222–231.
2. Алексеенко С.В., Архипов Д.Г., Цвелодуб О.Ю. Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Доклады АН. – 2011. – Т. 436. – N 1. – С. 43-46. Alekseenko, S.V., Arkhipov, D.G., Tsvelodub, O.Yu. Divergent system of equations for a fluid film flowing down a vertical wall // Dokl. Phys. – Vol 2011. . – Vol **56** . – P. 22–25.
3. Tsvelodub O.Yu., Arkhipov D.G. Nonlinear wave simulation on a surface of liquid film entrained by turbulent gas flow at weightlessness // Microgravity Science and Technology. –2013 DOI 10.1007/s12217-013-9345-x
4. Цвелодуб О.Ю. Моделирование волновых режимов на пленке вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Теплофизика и аэромеханика – 2012. – Т. 19. – N 2. – С. 183–192. Tsvelodub, O.Yu. Modeling of wave regimes on the film of viscous liquid falling down a vertical plate // Thermophysics and Aeromechanics. – 2012. – Vol. **19.** – P. 91–99.