УДК 532.73-1+532.787

ОСОБЕННОСТИ РОСТА ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ВЫСОКОВЯЗКОМ ГАЗОНАСЫЩЕННОМ РАСПЛАВЕ

Чернов А.А.[1, 2], Пильник А.А.[1]

[1]*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2]*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

Работа выполнена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-08-00472-а).

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется механизм роста кавитационного пузырька в высоковязкой метастабильной жидкости (пересыщенном магматическом расплаве). Показана ограниченность наиболее часто используемой в литературе модели роста пузырька, основанной на условии квазистационарности диффузии. При условии динамического равновесия на границе пузырька найдено аналитическое решение, описывающее эволюцию его роста. Данное предположение применимо в широком диапазоне величин начальной декомпрессии. Проведено сравнение результатов расчета с имеющимися экспериментальными данными, получено их хорошее соответствие.

ВВЕДЕНИЕ

Уже несколько десятилетий особое внимание исследователей привлекает проблема вулканических извержений. Это, прежде всего, связано с необходимостью прогноза и определения степени потенциальной опасности конкретных вулканов. Особый интерес представляют вулканы, тип извержения которых носит наиболее разрушительный, взрывной (или, как говорят, эксплозивный) характер. Извержение таких вулканов хоть и достаточно редко, но сильно непредсказуемо и наиболее катастрофично.

Очевидно, что даже непрерывное наблюдение за активным вулканом не может, в силу отсутствия прямых методов наблюдения за процессами, происходящими в земной коре, дать достаточно полной информации о том, что происходит в канале вулкана при извержении. Можно лишь с уверенностью констатировать только факты фазовых переходов (по конечным образцам затвердевшей магмы) и разрушения изначально сплошного магматического потока (по структуре выброса). Кроме того, начало самого извержения современными методами может быть предсказано только по косвенным признакам. Поэтому, последовательное и как можно более строгое построение моделей течения магмы в канале вулкана и исследование динамики различных режимов вулканических извержений методами механики многофазных сред с целью понимания механизмов, определяющих тип и характер извержения, а также интерпретации данных полевых наблюдений, представляется особенно актуальным.

В теоретических и экспериментальных постановках по моделированию взрывного вулканического извержения прежде всего следует обратить внимание на следующие проблемы [1]: особенность формирования (на начальной стадии извержения) трехфазного состояния магмы при ее декомпрессии в волне разгрузки; эволюцию структуры трехфазного потока при подъеме магмы по каналу вулкана; динамику разрушения вспененной и частично закристаллизованной магмы (процесса фрагментации магмы и ее перехода в газовзвесь); роль фаз и динамически возрастающей на несколько порядков вязкости магмы (в процессе ее дегазации и охлаждения) на структуру потока и общую динамику процесса извержения в целом. Все эти задачи чрезвычайно сложны для теоретического и экспериментального исследования, и каждая из них представляет собой отдельную научную проблему.

На данный момент времени существует множество работ, посвященных моделированию извержения вулкана как в общей постановке, так и сопровождающих его отдельных процессов в частности. Большое число работ посвящено исследованию кинетики нуклеации и роста кавитационных газовых пузырьков, образующихся в магматическом расплаве в результате его декомпрессии [2-9]. Однако, несмотря на значительные усилия, предпринимаемые в исследовании данного явления, до сих пор остается множество вопросов, требующих своего решения.

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА

Прежде чем перейти к постановке задачи, отметим некоторые уникальные свойства магматического расплава. Это, прежде всего, наличие в магме большого количества растворенных летучих компонентов (преимущественно воды, концентрация которой может достигать 7 % по массе, в зависимости от глубины залегания очага вулкана), а также высокую вязкость магмы, которая варьируется в диапазоне от 10^2 до 10^{12} Па · с, в зависимости от растворенного в ней газа и содержащихся кристаллитов. Вязкость магмы с достаточно хорошей точностью описывается зависимостью аррениусовского типа [7]

$$\mu(T,C) = \mu^* \exp\{E_\mu(C)/(k_B T)\},$$

при этом энергия активации E_μ является функцией концентрации растворенного газа и имеет вид: $E_\mu(C) = E_\mu^*(1-k_\mu C)$, , где C — массовая концентрация растворенного газа; E_μ^* — энергия активации для «сухого» расплава. Здесь μ^*; k_μ — эмпирические коэффициенты; k_B — постоянная Больцмана; T — температура. Зависимость равновесной концентрации растворенного в магме газа C^{eq} от давления p определяется законом Генри [7]:

$$C^{eq}(p) = K_H p^\alpha, \quad (1)$$

где K_H — постоянная Генри. Для воды $\alpha = 1/2$. В таком виде закон Генри справедлив для давлений $p < 200$ МПа.

Рассмотрим объем газонасыщенного магматического расплава, который в начальный момент времени подвергается быстрой декомпрессии (давление падает со значения p_i до значения p_f; $\Delta p_i = p_i - p_f$). Согласно закону Генри, при падении давления газ, растворенный в жидкости, оказывается в пересыщенном состоянии, в результате чего в объеме начинают спонтанно зарождаться и расти газовые пузырьки. Рост пузырьков опишем в рамках «ячеистой» модели, согласно которой каждому пузырьку присваивается некая сферическая область расплава, на границе которой выполняются условия симметрии. Ячейки при этом полностью заполняют весь объем. Процесс будем считать изотермическим.

Динамику роста пузырька опишем модифицированным уравнением Рэлея–Плессета, которое учитывает возникающий в процессе роста пузырька градиент вязкости расплава в радиальном направлении (из-за формирующегося вокруг пузырька градиента концентрации растворенного газа):

$$\rho_l(R\ddot{R} + (3/2)\dot{R}^2) = p_g - p_S - \frac{2\sigma}{R} - 4\hat{\mu}\frac{\dot{R}}{R}, \quad (2)$$

где R — радиус пузырька; p_g — давление газа в пузырьке; p_S — давление на границе ячейки; ρ_l — плотность расплава; σ — поверхностное натяжение; $\hat{\mu}$ — «эффективная» вязкость расплава, которая иммет вид:

$$\hat{\mu} = 3R^3\int_R^S \mu(r)/r^4\,dr + \frac{R^3}{S^3}\mu(S),$$

где S — радиус ячейки. Нетрудно показать, что в случае однородной вязкости расплава «эффективная» вязкость равна просто вязкости, а уравнение (2) становится классическим уравнением Рэлея–Плессета. Отметим, что ввиду большой вязкости магматических расплавов (даже при больших начальных концентрациях растворенных газов) инерционными членами в уравнении (2) в расчетах заведомо можно пренебречь.

Рост пузырька в общем случае происходит по следующему сценарию. В начальный момент времени давление газа в пузырьке p_g равняется начальному давлению в расплаве до его декомпрессии p_i. Это связано с тем, что концентрация растворенного в расплаве газа сразу же после декомпрессии остается равной равновесной концентрации при начальном давлении. А следовательно, в соответствии с законом Генри, начальное давление газа в пузырьке равно начальному давлению в расплаве. По мере роста пузырька давление в нем постепенно падает, вследствие чего на его границе нарушается условие равновесия, что приводит к десорбции газа. В свою очередь,

понижение концентрации газа в расплаве приводит к диффузионным процессам, ведущим к увеличению массы газа в пузырьке.

На начальной стадии роста, когда давление в пузырьке меняется незначительно, диффузионный поток газа пренебрежимо мал (но достаточен, чтобы поддерживать постоянное давление в пузырьке). В этом случае интегрируя (2), получим

$$R(t) = R^* + (R_i - R^*)\exp\left(\frac{\Delta p_i}{4\mu_i}t\right), \quad (3)$$

где R^* — критический радиус; R_i — начальный (надкритический) радиус пузырька, в выборе которого, вообще говоря, есть некий произвол; $\mu_i = \mu(T, C_i)$ — вязкость расплава при начальной концентрации растворенного газа. Для описания более поздней стадии требуется решить следующую краевую задачу.

Концентрация растворенного в расплаве газа $C(r,t)$ вокруг пузырька в процессе его роста описывается уравнением диффузии, отражающим сферическую симметрию задачи:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_l(r)\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(Dr^2\frac{\partial C}{\partial r}\right), \quad (4)$$

где D — коэффициент диффузии газа в расплаве; $v_l(r) = R\dot{R}^2/r^2$ — скорость расплава на расстоянии r от центра пузырька, которая находится из уравнения неразрывности.

В начальный момент времени

$$C = C_i \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (5)$$

где $C_i = C^{eq}(p_i)$ — начальная концентрация растворенного в расплаве газа, равная равновесной концентрации при начальном давлении.

На границе пузырька выполняется условие локального термодинамического равновесия (что обусловлено малой скоростью его роста):

$$C = C^{eq}(p_g) \quad \text{при} \quad r = R. \quad (6)$$

В качестве второго граничного условия запишем закон сохранения массы газа в ячейке (аналогичным условием является отсутствие диффузионного потока на границе ячейки):

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho_g + 4\pi\rho_l\int_R^S C(r)r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi S^3\rho_l C_i. \quad (7)$$

Если рассматривать рост одиночного пузырька, вторым граничным условием является условие на бесконечности, заключающееся в равенстве концентрации растворенного газа исходной на большом расстоянии от пузырька:

$$C \to C_i \quad \text{при} \quad r \to \infty. \quad (8)$$

В случае, когда размер пузырька достаточно мал по сравнению с размером ячейки, граничное условие (6) с хорошей точностью может быть заменено условием на бесконечности (8).

Систему (4) – (6) следует дополнить уравнением состояния газа в пузырьке (газ считаем идеальным)

$$(4\pi/3)R^3 p_g = (m_g/M_g)k_B T,$$

где m_g — масса газа в пузырьке; M_g — молекулярная масса газа.

Найдя распределение концентрации газа в расплаве, получим скорость изменения массы газа в пузырьке:

$$\frac{dm_g}{dt} = 4\pi R^2 D\rho_l\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R}. \quad (9)$$

В общем случае приведенную краевую задачу можно решить только численно. Однако в подавляющем числе работ решение задачи существенно упрощают, предполагая, что в процессе быстро устанавливается квазистационарное состояние, при котором концентрация так медленно меняется со временем, что можно принять $\partial C/\partial t \approx 0$, а также пренебречь конвективным членом в уравнении (4). В таком подходе полагается, что диффузионные процессы происходят гораздо быстрее конвективных. Для анализа их относительной скорости вводят число Пекле: $\mathrm{Pe} = \tau_D/\tau_u = 1$, где $\tau_D = R^2/D$ и $\tau_u = \mu/\Delta p$ — характерные времена диффузионных и конвективных процессов соответственно. Квазистационарному состоянию соответствуют значения $\mathrm{Pe} = 1$. В данном случае

$$C(r) = (1-(R/S))^{-1}\times$$
$$\times(C_S - C_R(R/S) - (C_S - C_R)R/r).$$

При $R/S = 1$

$$C(r) = C_i - (C_i - C_R)R/r.$$

Для скорости изменения массы газа получим:

$$\frac{dm_g}{dt} = 4\pi D\rho_l(1-(R/S))^{-1}(C_S - C_R)R.$$

На поздней стадии процесса, когда между пузырьком и окружающей его средой устанавливается динамическое равновесие (в пренебрежении лапласовским давлением $p_g \approx p_f$; $C^{eq}(p_g) \approx C^{eq}(p_f)$), квазистационарное решение имеет вид:

$$C(r) = C_i - (C_i - C_f)R/r;$$
$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + D_{eff}(t - t_0)}, \quad D_{eff} = 2D\varepsilon. \tag{10}$$

где D_{eff} — коэффициент «эффективной диффузии»; $\varepsilon = (\rho_l/\rho_{gf})(C_i - C_f)$ — степень начального пересыщения расплава.; $C_f = C^{eq}(p_f)$ — равновесная концентрация газа при конечном давлении; $\rho_{gf} = M_g p_f/(k_B T)$ — плотность газа в пузырьке при конечном давлении; R_0 — радиус пузырька в момент установления квазистационарного состояния t_0. Механизм роста пузырька, подчиняющийся закону (10), называют диффузионным.

Однако, полученное квазистационарное решение, как будет показано ниже, справедливо лишь при малых начальных пересыщениях расплава. В связи с этим попробуем решить данную задачу другим способом. Для простоты рассмотрим рост одиночного пузырька (или пузырька, размер которого на рассматриваемых временах много меньше размера ячейки). Кроме того, используем условие динамического равновесия на межфазной поверхности. Это предполагает малую длительность начальной экспоненциальной стадии роста по сравнению с диффузионной, что справедливо в широком диапазоне начальных пересыщений.

Перейдем к координатам $y = r/R$ и t (тем самым, сведя краевую задачу к задаче с неподвижными границами) и введем безразмерные переменные $\overline{C} = (C - C_f)/(C_i - C_f)$; $\overline{R} = R/R^*$; $\bar{t} = Dt/R^{*2}$. Тогда краевая задача (4)–(9) запишется в виде:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial \bar{t}} + \frac{\dot{\overline{R}}}{\overline{R}}\left(\frac{1}{y^2} - y\right)\frac{\partial \overline{C}}{\partial y} = \frac{1}{\overline{R}^2}\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right);$$

$$\overline{C} = 1 \quad \text{при} \quad \bar{t} = 0;$$

$$\overline{C} = 0 \quad \text{при} \quad y = 1;$$

$$\overline{C} = 1 \quad \text{при} \quad y \to \infty;$$

$$\overline{R}\dot{\overline{R}} = \varepsilon\left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right)_{y=1},$$

Найдем квазистационарное решение уравнения диффузии с учетом граничных условий:

$$\overline{C}(y) = \frac{\int_1^y \exp\left(-\left(\zeta^2/2 + 1/\zeta\right)\overline{R}\dot{\overline{R}}\right)/\zeta^2\, d\zeta}{\int_1^\infty \exp\left(-\left(\zeta^2/2 + 1/\zeta\right)\overline{R}\dot{\overline{R}}\right)/\zeta^2\, d\zeta}. \tag{11}$$

Используя данный профиль концентрации, получим неявное уравнение на $\dot{R}$:

$$\overline{R}\dot{\overline{R}}\int_1^\infty \exp\left(-\left(\zeta^2/2 + 1/\zeta - 3/2\right)\overline{R}\dot{\overline{R}}\right)/\zeta^2\, d\zeta = \varepsilon.$$

Видно, что если параметр $\overline{R}\dot{\overline{R}}$ достигает определенного значения ($\overline{R}\dot{\overline{R}} = \overline{D}_{eff}/2$), которое является решением последнего уравнения, и концентрация вокруг пузырька удовлетворяет уравнению (11), то решение краевой задачи становится автомодельным:

$$\overline{C}(y) = \frac{\int_1^y \exp\left(-\left(\zeta^2/4 + 1/(2\zeta)\right)\overline{D}_{eff}\right)/\zeta^2\, d\zeta}{\int_1^\infty \exp\left(-\left(\zeta^2/4 + 1/(2\zeta)\right)\overline{D}_{eff}\right)/\zeta^2\, d\zeta};$$

$$\overline{R}(\bar{t}) = \sqrt{\overline{R}_0^2 + \overline{D}_{eff}\left(\bar{t} - \bar{t}_0\right)}.$$

Коэффициент $\overline{D}_{eff}$ при этом находится из следующего неявного уравнения

$$\overline{D}_{eff}/2 \cdot$$
$$\cdot \int_1^\infty \exp\left(-\left(\zeta^2/4 + 1/(2\zeta) - 3/4\right)\overline{D}_{eff}\right)/\zeta^2\, d\zeta = \varepsilon.$$

Следует отметить, что полученное решение является точным, и при его выводе не привлекается анализ числа Пекле. Подобное решение было получено в [10] с привлечением идей подобия.

В общем случае коэффициент $\overline{D}_{eff}$ и распределение концентрации газа в расплаве могут быть найдены только численно. Однако, в случае малых и больших начальных пересыщений могут быть найдены наглядные асимптотические приближения.

При малых пересыщениях ($\varepsilon < 1$)

$$\overline{C}(y) \approx 1 - y^{-1};$$
$$\overline{D}_{eff} \approx 2\varepsilon. \tag{12}$$

В данном случае полученное решение (12) в точности совпадает с квазистационарным решением (10).

При больших пересыщениях ($\varepsilon > 1$)

$$\overline{C}(y) \approx erf\{(3/4\overline{D}_{eff})^{1/2}\,(y - 1)\};$$
$$\overline{D}_{eff} \approx (12/\pi)\varepsilon^2. \tag{13}$$

На рис. 1 приведена зависимость коэффицента эффективной диффузии от начального пересыщения расплава $\overline{D}_{eff}(\varepsilon)$, расчитанная численно, а также по формулам (12),

(13). Все свойства магматического расплава, используемые в расчетах, взяты из работы [7]. Видно, что зависимость $\overline{D}_{eff}(\varepsilon)$, постепенно меняет свой характер с линейной на квадратичную, при этом линейной, как и предполагалось, она остается только при очень малых пересыщениях.

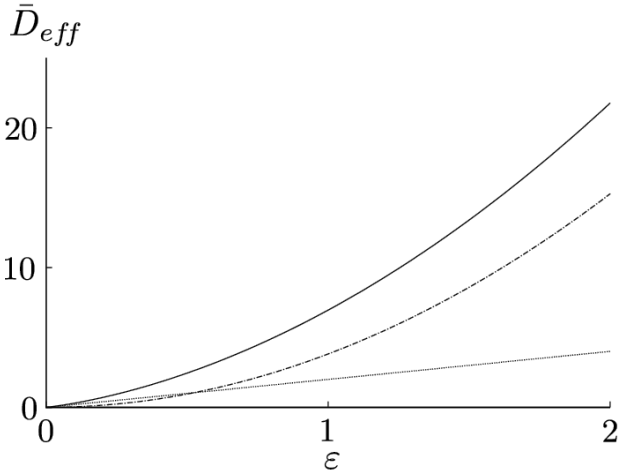

Рис.1 Зависимость коэффициента эффективной диффузии $\overline{D}_{eff}$ от начального пересыщения ε. Сплошная линия — численное решение; штриховая линия — приближенное решение при малых пересыщениях; пунктирная линия — приближенное решение при больших пересыщениях.

Данный факт иллюстрирует также рис. 2, на котором приведена зависимость радиуса пузырька от времени, построенная по найденным решениям, а также в рамках квазистационарного приближения. Величина начальной декомпрессии расплава в расчетах $\Delta p_i = 120$ МПа, что заведомо предполагает большое начальное пересыщение расплава.

Сравнение результатов расчетов по предложенной модели с экспериментальными данными [9] приведено на рис. 3.

Из рисунка видно, что даже при не очень больших пересыщениях расплава (в данных экспериментах Δp_i =30 МПа) результаты численного моделирования, а также полученное автомодельное решение, гораздо лучше описывают экспериментальные данные, чем квазистационарное решение (10). В работе [9] такое расхождение интерпретировалось как следствие заниженного коэффициента диффузии. Однако, причиной этому, по всей видимости, является неприменимость зависимости (10). Из всего вышесказанного можно заключить, что применение квазистационарного решения (10) во всем диапазоне начальных пересыщений неправомерно. Мало того, в реальных вулканических извержениях, где пересыщения, как правило, велики, для описания закона роста газовых пузырьков в магматическом расплаве вместо решения (10) следует использовать решение (13).

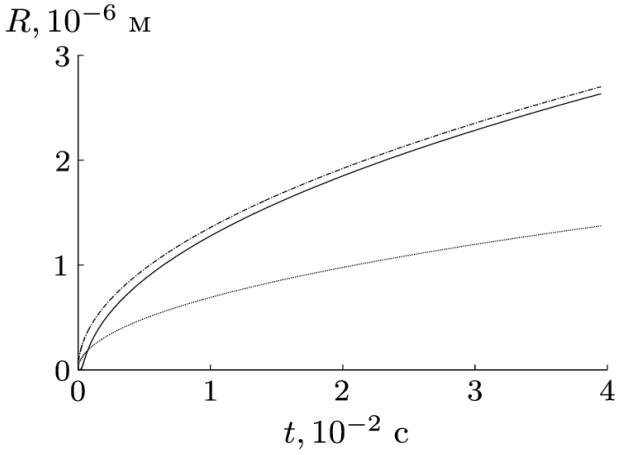

Рис.2 Зависимость радиуса пузырька от времени, $\Delta p_i = 120$ МПа. Сплошная линия — численное решение; штриховая линия — квазистационарное решение, пунктирная линия — автомодельное решение.

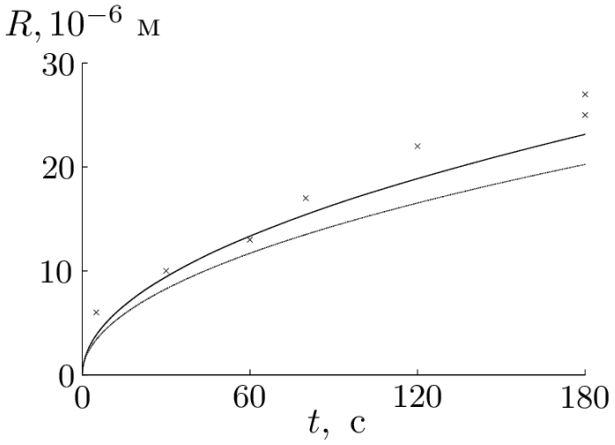

Рис.3 Зависимость радиуса пузырька от времени. Сплошная линия — численное решение; пунктирная линия — квастационарное решение; точки — эксперимент [9].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Детально исследована динамика роста кавитационных пузырьков в пересыщенном в результате быстрой декомпрессии магматическом расплаве. Показано, что в широком диапазоне начальных пересыщений крайне необходим учет нестационарности процесса. Полученное ранее другими авторами с привлечением идеи квазистационарности процесса и анализа числа Пекле решение справедливо лишь при малых начальных пересыщениях, в то время как в реальных вулканических извержениях пересыщения, как правило, велики. В настоящей работе найдено аналитическое решение с учетом нестационарности процесса, которое работает в широком диапазоне пересыщений и при малых пересыщениях асимптотически стремится к упомянутому выше квазистационарному. При нахождении данного решения, однако, использовалось условие динамического равновесия на межфазной поверхности, что предполагает малую длительность начальной экспоненциальной стадии роста, обусловленной вязкими эффектами, по сравнению с диффузионной, что, как показали численные расчеты, справедливо в широком диапазоне начальных пересыщений. Анализ начальной стадии роста был проведен с учетом возникающего вокруг пузырька диффузионного погранслоя, который ведет к появлению существенного градиента вязкости в радиальном направлении, что, в свою очередь, требовало модернизации уравнения Рэлея, описывающего динамику роста пузырька. В общем случае найдено численное решение задачи. Показано, при каких режимных параметрах процесса и на каких характерных временах найденное аналитическое решение хорошо согласуется с численным. Сравнение полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными показало их хорошее соответствие.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.K. Kedrinskiy, Hydrodynamic aspects of explosive eruptions of volcanoes: simulation problems, Shock Waves. 18 (6) (2009) 451–464.
2. A. Toramaru, Numerical study of nucleation and growth of bubbles in viscous magmas, J. Geophys. Res. 100 (B2) (1995) 1913–1931.
3. A.A. Proussevitch, D.L. Sahagian, Dynamics and energetics of bubble growth in magmas: Analytical formulation and numerical modeling, J. Geophys. Res. 103 (B8) (1998) 18223–18251.
4. Y. Liu, Y.X. Zhang, Bubble growth in rhyolitic melt, Earth Planet. Sci. Lett. 181 (1–2) (2000) 251–264.
5. M. Mangan, T. Sisson, Delayed, disequilibrium degassing in rhyolite magma: decompression experiments and implications for explosive volcanism, Earth Planet. Sci. Lett. 183 (3–4) (2000) 441–55.
6. C.C. Mourtada–Bonnefoi , D. Laporte Kinetics of bubble nucleation in a rhyolitic melt: an experimental study of the effect of ascent rate, Earth Planet. Sci. Lett. 218 (3–4) (2004) 521–537.
7. A.A. Chernov, V.K. Kedrinskii, M.N. Davydov, Spontaneous nucleation of bubbles in a gas-saturated melt under instantaneous decompression, J. Appl. Mech. Tech. Phys. 45 (2) (2004) 281–285.
8. S.I. Lezhnin, N.A. Pribaturin, A.L. Sorokin, Effect of viscosity on nucleation of bubbles in decompressed water-saturated magma, J. Appl. Mech. Tech. Phys. 46 (1) (2005) 14–20.
9. N.G. Lensky, O. Navon, V. Lyakhovsky, Bubble growth during decompression of magma: experimental and theoretical investigation, J. Volcanol. Geotherm. Res. 129 (1–3) (2004) 7–22.
10. A.P. Grinin, F.M. Kuni, G.Y. Gor, Theory of nonstationary diffusion growth of gas bubble in the supersaturated solution of gas in liquid, Colloid J. 71 (1) (2009) 46–54.