УДК 543.4:544.2

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД В ОБЛАСТЯХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Ахмадиев Ф.Г., Фазылзянов Р.Р., Бекбулатов И.Г., Галимов Р.А.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки России, проект 14.B37.21.0644.

АННОТАЦИЯ

Неизотермические течения двухфазных сред со сложным реологическим уравнением состояния в областях с проницаемыми поверхностями встречаются во многих технологических процессах.

В связи с этим целью работы являются построение математической модели неизотермических ламинарных течений неньютоновских двухфазных сред с учетом их фильтрования через проницаемые рабочие поверхности и численной схемы их расчета. Уравнения механики многофазных сред записаны в произвольной ортогональной системе координат, связанной с областью течения. Для решения поставленной задачи адаптирован метод поверхностей равных расходов. Рассмотрены двухмерные и осесимметричные течения и проведены конкретные численные расчеты тонкослойных течений по плоским и вращающимся поверхностям и в плоских каналах и осесимметричных трубах, для сред с реологическим уравнением состояния Оствальда де Виля. Изучено влияние процессов фильтрования и неизотермичности на гидродинамическую обстановку в области течения. Полученные результаты представляют большой практический интерес для различных технологических приложений: процессов смешения и диспергирования, разделения и сгущения двухфазных сред в фильтрующих аппаратах, реализации интенсивного теплообмена, управления пограничным слоем и т.п.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих технологических процессах широко используются аппараты с проницаемыми рабочими поверхностями с многофазными рабочими средами. Проектирование и расчет эффективности работы подобных аппаратов связаны с моделированием и решением внешних или внутренних и смешанных задач термогидродинамики многофазного потока в их рабочих узлах, требуют знания термогидродинамических характеристик потоков, учитывая зависимость реологических и физико-механических свойств рабочей среды от температуры. Изотермические течения двухфазных сред в областях с проницаемыми поверхностями изучены в ряде работ, например, в [1-3]. Имеются целый ряд работ по изучению термогидродинамической обстановки в областях с пористыми стенками для газов и ньютоновских жидкостей, например, [4,5]. Термогидродинамика реологически сложных многофазных сред в областях с проницаемыми поверхностями с учетом температурной зависимости свойств среды изучена недостаточно.

Для описания реологического состояния среды, как частный случай, можно использовать модель Оствальда де Виля:

$$\tau_{ij} = 2m\left|\sqrt{2I_2^*}\right|^{n-1} e_{ij}, \qquad (1)$$

где τ_{ij} - тензор напряжения; e_{ij} - тензор скоростей деформаций; $\sqrt{2I_2^*}$ - интенсивность скоростей деформации.

Для закона Оствальда де Виля показатель нелинейности «n» мало зависит от температуры ($n(T) \approx const$) зависимость величины m от температуры можно аппроксимировать различными зависимостями, например, полиномиальными.

© Ахмадиев Ф.Г., Фазылзянов Р.Р., Бекбулатов И.Г., Галимов Р.А.

Целью данной работы является математическое моделирование неизотермических ламинарных течений неньютоновских двухфазных сред с учетом фильтрования через проницаемые рабочие поверхности на основе методов механики многофазных сред и построение численной схемы ее реализации.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рассматриваются тонкослойные ламинарные плоские и осесимметричные течения двухфазных неньютоновских сред по проницаемым поверхностям или в каналах и трубах сложной формы с учетом фильтрования жидкой фазы через поверхность области течения в ортогональной системе координат, у которой координатная поверхность $x_2 = const$ совпадает с поверхностью области, а координатные линии (поверхности) $x_1 = const$ составляют семейство нормалей к ней. Тогда с учетом проведенного анализа значимости членов упрощенные размерные уравнения сохранения массы, импульса и энергии для двухфазных сред можно записать в виде [6]:

$$\frac{\partial(H_2H_3\rho_1U_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(H_1H_3\rho_1V_1)}{\partial x_2}=0, \qquad (2)$$

$$\rho_1\left(\frac{U_1}{H_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{V_1}{H_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\frac{U_1V_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)= \qquad (3)$$
$$=-\frac{\alpha_1}{H_1}\frac{\partial P}{\partial x_1}+\tau_{12}-F_{12X_1}+\rho_1F_1,$$

$$\rho_1\frac{U_1^2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}=-\frac{\alpha_1}{H_2}\frac{\partial P}{\partial x_2}-F_{12X_2}+\rho_1F_2, \qquad (4)$$

$$\rho_1c_{p_1}\left(U_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1}+V_1\frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right), \qquad (5)$$

$$\frac{\partial(H_2H_3\rho_2U_2)}{\partial x_1}+\frac{\partial(H_1H_3\rho_2V_2)}{\partial x_2}=0, \qquad (6)$$

$$\rho_2\left(\frac{U_2}{H_1}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+\frac{V_2}{H_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\frac{U_2V_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)= \qquad (7)$$
$$=-\frac{\alpha_2}{H_1}\frac{\partial P}{\partial x_1}+F_{12X_1}+\rho_2F_1,$$

$$\rho_2\frac{U_2^2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}=-\frac{\alpha_2}{H_2}\frac{\partial P}{\partial x_2}+F_{12X_2}+\rho_2F_2, \qquad (8)$$

$$\rho_2c_{p_2}\left(U_2\frac{\partial T_2}{\partial x_1}+V_2\frac{\partial T_2}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x_2}\right), \qquad (9)$$

где $c_{p_i}, T_i, U_i, V_i, \alpha_i, \lambda_i, \rho_i$ - соответственно удельная теплоемкость, температура, компоненты скорости, объемная концентрация, коэффициент теплопроводности, приведенная плотность $i-$ой фазы; F(F_1, F_2, F_3) - вектор массовых сил и его компоненты в направлении координат x_1, x_2, x_3; F_{12}-вектор силы межфазного взаимодействия; H_i - коэффициенты Ляме; $m(T_i, \alpha_2)$ эффективная динамическая вязкость; n – коэффициент нелинейности; P – давление; x_j -координата.

Из-за наличия фильтрации жидкой фазы через поверхность области течения уравнения (2)-(9) необходимо дополнить уравнениями фильтрации через нее:

$$\frac{\partial H_1H_3V_0}{\partial x_2}=0, V_0^{\,n}=-\frac{k}{\psi}\left(\frac{\partial p_0}{\partial x_2}+\rho_1{}^0F_{1x_2}\right)$$

или для тонких стенок зависимостью

$$V_0^{\,n}=-\frac{k}{\psi}\left(\frac{p_0-p_{\hat{a}}}{d}\right).$$

1. **Тонкослойное течение по проницаемой поверхности**

Система уравнений (2) - (9) и уравнения фильтрации должны решаться при следующих граничных и начальных условиях:

при $x_2=0, P_0=P_в$; (10.1)

при
$x_2=d: P=P_o, U_1=0, V_0=\alpha_1V_1, T_1=T_{CT}$; (10.2)

при $x_2=h(x_1): P=P_a, \tau_{12}=0$; (10.3)

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_2}=\beta[T(h)-T_в],$$

при $x_1=x_{1нач}: a_2=a_{2нач}, U_i=U_{iнна}(x_2)$,
$V_i=V_{iнна}(x_2), T_i=T_{iнна}(x_2), h=H, i=\overline{1,2}$, , (10.4)

где β - коэффициент теплоотдачи, $d-$ толщина стенки, $h(x_1)$ -толщина пленки

Уравнения движения (2) - (9) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые в квадратурах не интегрируется. В данной работе

для решения этой системы предлагается адаптированный нами метод поверхностей равных расходов [7]. В соответствии с этим методом в поле течения суспензии введем линии тока $y_k = y_k(x_1) = x_{2,k}{}^j(x_1)$ и представим компоненты скорости i-ой фазы для k-ого слоя и температуру в виде $U_i^k = U_i[x_1, y_k(x_1)]$, $V_i^k = V_i[x_1, y_k(x_1)]$, $T_i^k = T_i[x_1, y_k(x_1)]$.

Здесь $k = \overline{1,N}$, N - число введенных линий тока. При этом линия y^1 совпадает с поверхностью течения, а оследняя линия y^N со свободной поверхностью. Сведем задачу о развитии течения слоя суспензии к численному определению полей скоростей, температуры и линии тока.

Обозначим величину изменения расхода первой фазы между k-ой и $(k+1)$-ой линиями тока через $\Phi_1^k(x_1)$. В случае непроницаемой поверхности $\Phi_1^1(x_1) = 0$. По определению

$$\frac{d}{H_1 dx_1}\int_{y^k}^{y^{k+1}} \alpha_1 Z U_1 H_2 dx_2 = \Phi_1{}^k(x_1) \qquad (11)$$

При отсутствии массообмена изменение расхода сплошной фазы будет определяться фильтрацией жидкости через пористую проницаемую поверхность. Систему координат выбираем таким образом, чтобы величины a_1, h, U_i, V_i не зависели от координаты x_3 и обозначим $Z=H_3(x_{3k}-x_{3n})$. Тогда интегральное условие сохранения количества сплошной фазы для произвольного сечения можно записать в виде:

$$\int_{\delta}^{h} \alpha_1 Z U_1 H_2 dx_2 + \int_{x_{нач}}^{x} \alpha_{10} Z |V_0| H_1 dx_1 = Q_{1н}$$

Продифференцируем данное соотношение по x_1 и после сравнения с результатом дифференцирования (11) получим

$$\Phi_1{}^k(x_1) = \alpha_{10} Z V_0 \delta_1{}^k, \qquad k = \overline{1, N-1} \qquad (12)$$

Применяя правило Лейбница, с учетом уравнения (2) вычислим интеграл (11)

$$\Phi_1{}^k = \alpha_1 Z\left(V_1^k - U_1^k \frac{H_2 dy_k}{H_1 dx_1}\right) - \alpha_1 Z\left(V_1^{k+1} - U_1^{k+1}\frac{H_2 dy_{k+1}}{H_1 dx_1}\right)$$

Отсюда, с учетом кинематического условия на свободной поверхности и соотношений (12), получим

$$\alpha_1 Z\left(V_1^k - U_1^k \frac{H_2 dy_k}{H_1 dx_1}\right) = \Phi_1^k \delta_1^k, \; k = \overline{1,N}. \qquad (13)$$

Производные по независимой переменной x_1 имеют вид:

$$\frac{d\Theta}{H_1 dx_1} = \frac{\partial\Theta}{H_1 \partial x_1} + \frac{\partial\Theta}{H_2 \partial y_k}\frac{H_2 dy_k}{H_1 dx_1}. \qquad (14)$$

Заменив частную производную $\partial U_1 / \partial x_1$ согласно (14) с учетом соотношений (13) запишем уравнение (3) для k слоя

$$\frac{\rho_1 U_1{}^k}{H_1}\frac{dU_1{}^k}{dx_1} = -\frac{\alpha_1}{H_1}\frac{\partial P_k}{\partial x_1} - \frac{\rho_1 U_1{}^k V_1^k}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} \qquad (15)$$
$$+ \tau_{12}{}^k - F_{12x_1} + \rho_1 F_1.$$

После интегрирования суммы уравнений (4) и (8) на интервале $[y_k, y_{k+1}]$ получим

$$P_{k+1} - P_k = M_k, \qquad k = \overline{1, N-1}, \text{ где}$$
$$M_k(x_1) = \int_{y_k}^{y_{k+1}} J(x_1, x_2) dx_2, J(x_1, x_2) = H_2 \rho F_2$$
$$+ \frac{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}.$$

Преобразуем результирующее соотношение в более удобную форму и дифференцируя по продольной координате, получим

$$\frac{dP_k}{dx_1} = \sum_{\lambda=k}^{N-1}\frac{dM_\lambda}{dx_1}, \quad k = \overline{1, N-1}. \qquad (16)$$

Заменив в уравнении (15) $\frac{\partial P_k}{\partial x_1}$ согласно (14) с учетом (16), и используя сумму уравнений (4) и (8), для определения поля скоростей сплошной фазы получим систему уравнений

$$\frac{\rho_1 U_1^k}{H_1}\frac{dU_1^k}{dx_1} = \frac{\alpha_1}{H_1}\sum_{\lambda=k}^{N-1}\frac{dM_\lambda}{dx_1} + \alpha_1 J(x_1, x_2)\frac{dy_k}{H_1 dx_1}$$
$$- \frac{\rho_1 U_1^k V_1^k}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \tau_{12}{}^k - F_{12x_1}^k + \rho_1 F_1, k = \overline{2, N}. \qquad (17)$$

Аналогично можно получить уравнения для дисперсной фазы. Опуская промежуточные выводы, приведем окончательное выражение для распределения скоростей U_2^k

$$\frac{\rho_2 U_2^k}{H_1}\frac{dU_2^k}{dx_1} = \frac{\alpha_2}{H_1}\sum_{\lambda=k}^{N-1}\frac{dM_\lambda}{dx_1} + \alpha_2 J(x_1, x_2)\frac{dy_k}{H_1 dx_1}$$
$$- \frac{\rho_2 U_2^k V_2^k}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + F_{12x_1}^k + \rho_2 F_2, \qquad k = \overline{2, N}. \qquad (18)$$

Если размеры включений невелики и разность плотностей фаз незначительны, от-

носительное движение фаз может оказаться незначительным. Тогда можно использовать квазигомогенную модель течения двухфазных сред. В квазигомогенном приближении линии тока вводятся вполне однозначно для некоторой эффективной среды с переменными по продольной координате характеристиками $\rho(\alpha_2(x_1))$, $\mu(\alpha_2(x_1))$. Преобразованное уравнение движения эффективной среды можно получить сложением уравнений (17) и (18)

$$\frac{\rho U}{H_1}\frac{dU}{dx_1} = \frac{1}{H_1}\sum_{\lambda=k}^{N-1}\frac{dM_\lambda}{dx_1} + J(x_1,x_2)\frac{dy_k}{H_1 dx_1} - \frac{\rho UV}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \tau_{12}{}^k + \rho F_1. \quad (19)$$

Здесь $k=\overline{1,N}$, N - число введенных линий тока. При этом линия y^1 совпадает с поверхностью течения, а пУравнения для поверхностей равного расхода определим из (11), для этого представим интеграл по одной из формул численного интегрирования, затем продифференцируем полученную разностную формулу по x_1. Если проинтегрировать (11) по формуле трапеций, то уравнение для определения поверхности имеет вид

$$\frac{dy_{k+1}}{dx_1} = \frac{dy_k}{dx_1} + \frac{2H_1\Phi_1^k}{\Delta_k} \quad \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta_k}\frac{d\Delta_k}{dx_1}, k=\overline{2,N}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=0; \quad (20)$$

где $\Delta_k = (\alpha_1 H_2 Z U_1)_k + (\alpha_1 H_2 Z U_1)_{k+1}$.

Для вычисления "вязкостного" члена и производных температуры сеточные решения записывались в виде разложения в ряд по полной системе базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям (10)

$$U^k = \sum_{j=1}^{N} A_j(x_1)U_{kj}(x_1),\ T^k(x_1) = \sum_{j=1}^{N} A_j^T T_j^k(x_1) \quad (21)$$

Систему базисных функций можно выбрать в виде [7]

$$U_{kj}(x_1) = \left(\frac{j+1}{j} - \eta_k\right)\eta_k^j,$$

где $\eta_k(x_1) = \frac{y_k(x_1)}{y_N(x_1)};\ j=\overline{1,N};\ k=\overline{1,N}.$

Систему базисных функций для температуры можно выбрать в виде:

$$T_j^k(x_1) = \left(y^k(x_1)\right)^j$$

Потребуем, чтобы скорость и температура, определяемые из (21), совпали с $U_1^k(x_1)$ и $T^k(x_1)$ на линиях $y^k(x_1)$. Тогда для определения коэффициентов $A_j(x_1)$ и $A_j^T(x_1)$ получим системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N} A_j(x_1)U_{kj}[y_k(x_1)] = U_1^k(x_1),$$

$$T^k(x_1) = \sum_{j=1}^{N} A_j^T(x_1)T_j^k(x_1), \qquad k=\overline{1,N}. \quad (21.1)$$

Определив значения $A_j(x_1)$ из системы уравнений, можно вычислить "вязкостный" член τ_1^2 на соответствующих линиях тока. Определив значения $A_j^T(x_1)$, используя разложение (21.1) можно вычислить значения температуры T^k на соответствующих линиях тока. Система (2) - (9), (19) - (20) и граничные условия (10) представляют замкнутую систему уравнений, решение которых при известных правых частях можно получить одним из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В уравнениях движения (17) - (19), записанных для любой поверхности равных расходов y_k, присутствует слагаемое

$$\frac{\alpha_i}{H_1}\sum_{\lambda=k}^{N-1}\frac{dM_\lambda}{dx_1},$$

которое содержит неопределенную величину dy^N/dx_1. В то же время производные dy^k/dx_1 определяются с помощью рекуррентных соотношений (20) снизу вверх, начиная с dy^1/dx_1. Поэтому для вычисления правых частей системы (17) - (19) необходимо использовать прогонку. Нахождения явных выражений прогоночных коэффициентов целесообразно выполнить после конкретизации области течения и определения коэффициентов Ляме H_1, H_2, H_3.

Пример. Течение по плоской поверхности.

Пусть слой гетерогенной среды стекает по наклонной плоскости. Выберем декартову систему координат $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$ с коэффициентами Ляме H_1=1, H_2=1, H_3=1. Тогда

$$F_1 = g\sin\varphi,\quad F_2 = -g\cos\varphi,\quad J(x,y) = \rho F_2,$$

$$M_k(x) = \rho F_2(y_{k+1} - y_k)\quad Z = 1.$$

Здесь g - ускорение свободного падения, м/с^2; φ -угол наклона плоскости.

Дифференциальные уравнения (5),(9), (19) - (20) для плоскости единичной толщины $(Z=1)$ имеют вид:

$$\rho U_1^k \frac{dU_1^k}{dx} = gCos\varphi\left[(y_N - y_k)\frac{d\rho}{dx} + \rho\frac{dy_N}{dx}\right] + m\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial U_1^k}{\partial y}\right)^n\right] + \rho g Sin\varphi,$$

$$\frac{dy_{k+1}}{dx} = \frac{dy_k}{dx} + \frac{2V_0\delta_1^k}{\alpha_1(U_1^k + U_1^{k+1})} - \frac{y_{k+1} - y_k}{\alpha_1(U_1^k + U_1^{k+1})}\frac{d}{dx}\left[\alpha_1(U_1^k + U_1^{k+1})\right].$$

$$U_i^k \frac{\partial T_i^k}{\partial x} + V_i^k \frac{\partial T_i^k}{\partial y} = a_i \frac{\partial^2 T_i^k}{\partial y^2},$$

Здесь a_i - коэффициент температуропроводности.

Введем безразмерные переменные для данной системы с помощью подстановки

$$x = H\,\mathrm{Re}\,\bar{x}, y = H\bar{y}, U_i = U_1\,\bar{U}_i, V_0 = \frac{U_1}{\mathrm{Re}}\bar{V}_0, k = H\bar{k},$$

$$P - P_e = \rho_1^0 U_1^2 \bar{P}, \mathrm{Re} = H^n U_1^{2-n}\rho_H / m_H, \qquad (22)$$

Указанная система в безразмерных переменных примет вид (черточки опущены):

$$U_1^k \frac{dU_1^k}{dx} = \left[(y_N - y_k)\frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{d\alpha_2}{dx} + \frac{dy_N}{dx}\right]\frac{Cos\varphi}{Fr_g} + \frac{\nu}{\nu_H}\frac{\partial^2 U_1^k}{\partial y^2} + \frac{\mathrm{Re}\,Sin\varphi}{Fr_g},$$

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{dy_{k-1}}{dx} + \frac{2V_0\delta_1^k}{\alpha_1(U_1^k + U_1^{k-1})} - \frac{y_k - y_{k-1}}{\alpha_1(U_1^k + U_1^{k-1})}\frac{d\left[\alpha_1(U_1^k + U_1^{k-1})\right]}{dx},$$

$$U_i^k \frac{\partial T^k}{\partial x} + V_i^k \frac{\partial T^k}{\partial y} = \frac{\mathrm{Re}}{Pe}\frac{\partial^2 T_i^k}{\partial y^2}.$$

Здесь $Fr_i = V_{i1}^2 / F_i l_2$ - число Фруда, определяемое компонентом массовой силы, направленной по координате x_i; $Pe = Vl_2/a$ - число Пекле; $\mathrm{Re} = \rho^0 V_1 l_2 / m$ - числа Рейнольдса; l_j - размер области течения в направлении x^j; δ_1^k -символ Кронекера.

Для вычисления правых частей методом прогонки первые два уравнения полученной системы приведем к виду

$$y_k' - y_{k-1}' + S_k U_{k-1}' + S_k U_k' = E_k, U_k' = D_k + C_k y_N',$$

$$S_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{U_{1k} + U_{1k-1}},$$

$$D_k = \frac{1}{U_{1k}}\left\{\begin{array}{l}\frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{y_N - y_k}{Fr_g}\alpha_2' Cos\varphi + \\ \frac{\nu}{\nu_H}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)^n\right] + \frac{\mathrm{Re}\,Sin\varphi}{Fr_g}\end{array}\right\}, \qquad (23)$$

$$C_k = \frac{Cos\varphi}{U_{1k}Fr_g}, E_k = \frac{2V_0\delta_1^k}{\alpha_1(U_{1k} + U_{1k-1})} + (y_k + y_{k-1})\frac{\alpha_2'}{\alpha_1}.$$

Здесь и далее для удобства номера поверхностей равных расходов и скоростей, написаны в виде нижнего индекса, а штрихи означают производные по безразмерной продольной координате.

Представим искомую функцию y_k' в виде прогоночного соотношения:

$$y_k' = A_k y_N' + B_k, \qquad (24)$$

и подставим в уравнение (23). После несложных преобразований получим явные выражения прогоночных коэффициентов в виде следующих рекуррентных соотношений

$$A_k = A_{k-1} - S_k C_{k-1} - S_k C_k,$$
$$B_k = B_{k-1} - S_k D_{k-1} - S_k D_k + E_k, k = \overline{2, N}; \qquad (25)$$
$$A_2 = -S_2 C_2, \qquad B_2 = E_2 - S_2 D_2.$$

При $k = N$ из (24) получим $y_N' = B_N/(1 - A_N)$. Далее, обратной прогонкой вычисляются значения правых частей системы дифференциальных уравнений (23).

В качестве примера рассмотрим решение данной задачи в квазигомогенном приближении, когда $U_1 \approx U_2 = U$, $V_1 \approx V_2 = V$, $T_1 \approx T_2 = T$ система уравнений (2)-(9) в случае течения по наклонной плоскости запишется в виде:

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x_2} = 0, \qquad (26)$$

$$\rho\left(U\frac{\partial U}{\partial x_1} + V\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) = \alpha\frac{\partial P}{\partial x_1} + \tau_{12} + \rho F, \qquad (27)$$

$$\alpha\frac{\partial P}{\partial x_2} + \rho F = 0, \qquad (28)$$

$$\rho c_p\left(U\frac{\partial T}{\partial x_1} + V\frac{\partial T}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_2}\right). \qquad (29)$$

Система (26) - (29) решается при следующих граничных и начальных условиях:

при $x_2 = 0 : P_0 = P_в$; (30.1)

при $x_2 = d : P = P_0, U = 0, T = T_{ст}, \mathrm{V}_0 = \alpha_1 \mathrm{V}$;

при $\mathrm{x}_2 = h(x_1) : \; P = P_A, \; \tau_{12} = 0,$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} = \beta \left[T(h) - T_{air} \right] \quad , \qquad (30.2)$$

при $\mathrm{x}_1 = x_{1нач} : \alpha = \alpha_{нач}, \mathrm{U} = U_{нач}(x_2),$
$\mathrm{V} = V_{нач}(x_2), \mathrm{T} = T_{нач}(x_2), \quad h = H.$ (30.3)

Для данного примера была разработана программа и выполнены численные расчеты, результаты которых приведены ниже.

2. Напорные течения в каналах и трубах с проницаемыми стенками

В этом случае система уравнений (2)-(9) и уравнения фильтрации вместо граничных условий (10) решаются при следующих граничных условиях:

при $x_2 = 0 : \; P_0 = P_в$;

при $x_2 = H + d_1 + d_2 : \; P_0 = P_в$; (31.1)

при

$x_2 = d_1 : P_0 = P, \; V_0 = \alpha_1 V_1, U_1 = 0, T_i, = T_{icm1}$; (31.2)

$x_2 = H + d_1 : P_0 = P, V_o = \alpha_1 V_1, \; U_1 = 0, \; T_i = T_{icm2}$;

при $x_1 = x_{1н} : \alpha_1 = \alpha_{1н}, V_i = V_{iн}(x_г), V_i = V_{iн}(x_г),$
$P = P_{вх}, T_i = T_{iн}(x_г), \; i = 1,2.$ (31.3)

Задача (2)-(9) при граничных условиях (31) решается аналогично, используя вышеизложенную схему решения задачи (2) - (9), (10).

При решении задач (2)-(9),(10) и (2)-(9),(31) в первом приближении предполагалось, что теплофизические параметры фаз, кроме эффективной вязкости несущей фазы, незначительно меняются в зависимости от температуры, а для учета температурной зависимости эффективной вязкости была использована полиномиальная аппроксимация.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Были рассчитаны процессы обогрева и охлаждения среды, как со стороны стенки, так и со стороны свободной поверхности пленки с учетом фильтрации жидкой фазы через проницаемую поверхность.

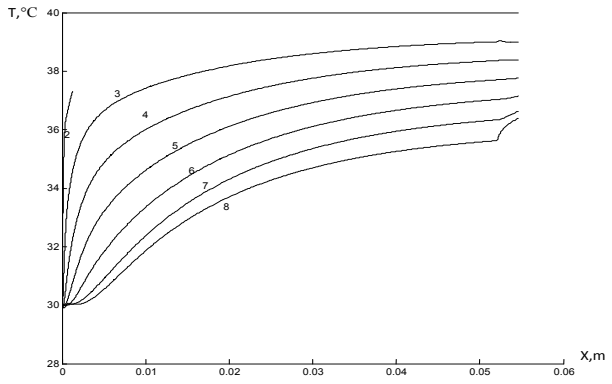

Рис.1 Профили температуры на линиях поверхностей равного расхода при $h_{нач}=10^{2} м$.

На рис. 1 представлены изменения температуры на линиях тока при движении среды по “горячей” стенке. Изменение температуры начинается с нижнего слоя и передается снизу вверх. После достижения теплового пограничного слоя свободной поверхности происходит изменение температуры на свободной поверхности пленки.

$u_{нач} = 10^{2} м/с, \mathrm{Re}_n = 0.16, T_{ж} = 30^{\circ} C,$
$T_{ст} = 40^{\circ} C, \; T_в = 30^{\circ} C, \; k = 1{,}27 \cdot 10^{12} м.$

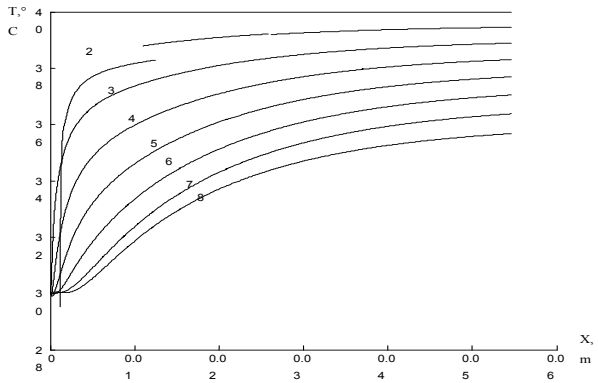

Рис.2 Профили температуры на линиях поверхностей равного расхода при $h_{нач} = 10^{-2} м$, $u_{нач} = 10^{2} м/с$, $\mathrm{Re}_n = 0.16$, $T_{ж} = 30^{\circ} C$, $T_{ст} = 40^{\circ} C$, $T_в = 30^{\circ} C$, $k = 0 м$.

Фильтрация сплошной фазы через проницаемую поверхность приводит к уменьшению толщины слоя гетерогенной среды. Это приводит к изменению положения линий поверхностей равных расходов. На рис. 2 представлены изменения температуры на линиях тока при течении гетерогенной среды по непроницаемой поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведена адаптация метода поверхностей равных расходов для процессов течения и фильтрования двухфазной среды через проницаемые поверхности в неизотермических условиях, численные расчеты выполнены в квазигомогенном приближении. Построенная математическая модель позволяет рассчитать процессы неизотермического течения двухфазной среды в областях с проницаемыми поверхностями при различных тепловых режимах и составляет основу для постановки задач оптимального проектирования узлов технологического оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф.Г. Ахмадиев, Р.И. Ибятов, Л.П. Холпанов. Течение многофазной среды по проницаемой поверхности с образованием осадка. Инженерно-физический журнал. т. 78, № 2, 2005г. С.65-73. F. G. Akhmadiev, R. I. Ibyatov, L. P. Kholpanov (2005), “Current multiphase fluids on the surface to form a permeable cake”, Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal, Vol.78, no.2, pp. 65-73
2. R. I. Ibyatov, L. P. Kholpanov, F. G. Akhmadiev, I. G. Bekbulatov. Mathematical Modeling of the Flow of a Multiphase Heterogeneous Medium in a Permeable Tube. Theoretical Foundations of Chemical Engineering, Vol. 39, No. 5, 2005, p. 503 - 511 R.I. Ibyatov, L.P. Kholpanov, F.G. Akhmadiev, I. G. Bekbulatov(2007). Mathematical Modeling of the Flow of a Multiphase Heterogeneous Medium in a Permeable Channel. Theoretical Foundations of Chemical Engineering, Vol. 41, No. 5, pp. 490 -499.
3. К.Н.Волков. Моделирование нестационарного течения в канале при наличии распределенного вдува со стенок и вынужденных колебаний давления. Инженерно-физический журнал, Т.86,№1. 2013 г. С.94-101. K. N. Volkov (2013), “Modeling of unsteady flow in a channel in the presence of a distributed blowing from the walls and forced oscillations of pressure”, Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal, Vol.86, no.1, pp. 94-101
4. Е.Б. Давыдова, М.И. Ильин, А.В. Тарасов. Моделирование нестационарного процесса фильтрации суспензий в тупиковом канале. Теоретические основы химической технологии, 2013, том 47, №3, с.352-354. E. B. Davydova, M. I. Il’in, A. V. Tarasov (2013). “Modeling of unsteady filtration process slurries in a dead-end channel”. Theoretical Foundations of Chemical Engineering, Vol. 47, No. 3, pp. 352-354.
5. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред.Ч.1.Наука, Гл.ред физ.-мат.лит., Москва, 1987,464 с. Nigmatullin, R.I.(1987) Dinamika mnogofaznykh sred[Dynamics of polyphase mediums],Nauka,Moscow,Russia
6. Холпанов Л.П., Шкадов В.Я. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. Наука, Москва, 1990, 270 с. Kholpanov L.P., Schkadov V.Ya.(1990) Gidrodynamica I teplomassoobmen s poverkhnostyu razdela[Fluid dynamics and heat transfer at the interface] Nauka,Moscow,Russia