УДК 532.51

# СИММЕТРИЯ В ЗАДАЧЕ О ВОЛНОВЫХ РЕЖИМАХ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**Архипов Д.Г., Вожаков И.С., Маркович Д.М., Цвелодуб О.Ю.**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия*

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Правительства России для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (№ 11.G34.31.0035), Президента РФ для господдержки ведущих научных школ РФ (№ НШ-5762.2014.8) и молодых ученых (№ МК-5997.2014.1).

**АННОТАЦИЯ**

Проведено исследование дивергентной системы уравнений [5] для моделирования нелинейных волн на стекающей по вертикальной плоскости пленке жидкости. Обнаружено, что в расширенной по поперечной координате расчетной области $\eta' \in [-1,1]$ (область реального течения $\eta' \in [-1,0]$) дивергентная система уравнений вместе с граничными условиями инвариантна относительно некоторого преобразования четности. Продемонстрирована эффективность применения этой симметрии для численного решения задачи методами Галеркина. Рассчитаны несколько семейств стационарно-бегущих решений системы. Выявлена сложная топологическая структура ветвлений таких решений. Для случая умеренных чисел Рейнольдса численно показано, что стационарно-бегущие решения системы обладают обнаруженной симметрией.

## ВВЕДЕНИЕ

Пленочные течения находят широкое применение в технологиях тепло- и массообмена. Их теоретическое исследование было начато в 1916 году с основополагающей для теории пленочной конденсации работы Нуссельта. В ней было дано точное решение задачи о безволновом стекании тонкого слоя вязкой жидкости по твердой наклонной стенке. Естественное развитие волн на свободной поверхности пленки дополнительно интенсифицирует процесс теплоотдачи от нагреваемой подложки. Изучение основных характеристик и формы этих волн в пионерских работах Капицы положило фундамент новому научному направлению.

Полная формулировка задачи о волновом режиме стекания изотермических пленок понятна и включает в себя систему уравнений Навье–Стокса и неразрывности с соответствующими граничными условиями на стенке и на свободной поверхности. Такая постановка подразумевает решение задачи в изменяющейся и неизвестной заранее области течения, что значительно усложняет математическое и численное моделирование. Одним из плодотворных путей решения этой проблемы стал интегральный подход Шкадова, в основу которого положена гипотеза об автомодельном полупараболическом профиле продольной скорости в пленке, проверенная в ряде экспериментов. Автор также отмечает возможность уточнения картины течения в слое путем применения к системе уравнений движения жидкости классического спектрального метода Галеркина. В последнее время усилия многих исследователей сосредоточены на получении новых модельных систем именно таким методом (см. например [1-3]).

В середине 80-х годов прошлого столетия возникает альтернативный подход к решению проблемы подвижной свободной поверхности. Уравнения гидродинамики переписываются в новых переменных, преобразующих область течения в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \quad \eta = \frac{y}{h(x,t)}, \quad t = t \qquad (1)$$

где $h(x,t)$ – мгновенная локальная толщина пленки. Система координат (1) неортогональ-

© Архипов Д.Г., Вожаков И.С., Маркович Д.М., Цвелодуб О.Ю. 

на, поэтому обычная векторная формулировка уравнений для нее неприменима. По этой причине многие авторы ограничиваются простой заменой переменных без преобразования векторов и тензоров, содержащихся в исходных уравнениях [4].

В работе [5] преобразование (1) было выполнено для системы уравнений гидродинамики, выписанной в тензорной форме, инвариантной относительно систем координат. В результате в длинноволновом приближении была получена система:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t}+\frac{\partial(hu^2)}{\partial x}+\frac{\partial(huv)}{\partial \eta}=\frac{\sigma}{\rho}h\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+\frac{\nu}{h}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+gh$$
$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial(hu)}{\partial x}+\frac{\partial(hv)}{\partial \eta}=0 \qquad (2)$$

При этом для свободно стекающей пленки на твердой стенке выполняются граничные условия прилипання:

$$u(x,0,t)=v(x,0,t)=0,$$

а на свободной поверхности – условие отсутствия касательных напряжений и кинематическое условие соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,1,t)=0, \quad v(x,1,t)=0 \qquad (3)$$

Подчеркнем, что в (2)–(3) $u(x,\eta,t)$ и $v(x,\eta,t)$ – контрвариантные компоненты скорости, отвечающие координатам $x$ и $\eta$ соответственно. Ясно, что, так как $x$ осталась исходной физической декартовой координатой, компонента $u(x,\eta,t)$, в отличие от $v(x,\eta,t)$, остается продольной компонентой физической скорости.

## СИММЕТРИЯ ЧЕТНОСТИ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Сделаем в рассмариваемой задаче преобразование сдвига по поперечной координате $\eta$:

$$\eta'=\eta-1.$$

Отметим здесь, что $\eta'$ выражается через исходные декартовы координаты следующим образом:

$$\eta'=y/h(x,t)-1$$

Теперь рассматриваемая область течения занимает полосу $\eta'\in[-1,0]$.

Легко заметить, что оба уравнения системы (2) инвариантны относительно преобразования:

$$\eta'\to-\eta', \quad u(x,\eta',t)\to u(x,-\eta',t),$$
$$v(x,\eta',t)\to -v(x,-\eta',t), \qquad (4)$$

Справедливость данного преобразования означает в частности, что у этих уравнений в полосе $\eta'\in[-1,1]$ в принципе существуют решения двух типов. Решения первого типа обладают симметрией :

$$u(x,\eta',t)=u(x,-\eta',t), \quad v(x,\eta',t)=-v(x,-\eta',t)$$

Ясно, что если среди решений этого типа взять те, которые в полосе $\eta'\in[-1,1]$ удовлетворяют граничным условиям прилипания на обеих границах:

$$u(x,-1,t)=v(x,-1,t)=0, \quad u(x,1,t)=v(x,1,t)=0,$$

то в полуполосе [-1,0] получим решение нашей задачи (2)–(3).

Действительно на границе $\eta'=-1$ условие прилипания выполнено, а граничное условие непротекания при $\eta'=0$ удовлетворяется автоматически, в силу того что контрвариантная компонента поперечной скорости для таких решений – антисимметричная функция. Соответственно в силу симметрии функции $u$ на этой границе у данных решений также автоматически выполняется и динамическое условие:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,0,t)=0$$

Решения второго типа подобной симметрией не обладают, но в силу (4), если существует решение $u(x,\eta',t)$ и $v(x,\eta',t)$, то есть и решение:

$$u_1(x,\eta',t)=u(x,-\eta',t), \qquad v_1(x,\eta',t)=-v(x,-\eta',t).$$

Естественно, среди решений уравнений (2)–(3) в полосе $\eta'\in[-1,1]$, удовлетворяющих условиям прилипания на обеих границах, имеются и решения этого типа.

В общем случае если искать решения второго типа для уравнений (2)–(3) в полосе $\eta'\in[-1,1]$, удовлетворяющих условиям прилипания на обеих границах, то для них не будут выполняться условия:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,0,t)=0, \qquad v(x,0,t)=0,$$

а если пытаться продолжить решение задачи (2)–(3) на интервал $\eta'\in[0,1]$, используя найденные значения $u(x,0,t)$ и $v(x,0,t)$, то на границе $\eta'=1$ не удастся выполнить условие прилипания.

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДОВ ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (2—3)

Как уже упоминалось, интерес к использованию спектрального метода Галеркина применительно к задачам о движения жидкости заметно вырос. При описании пленочных течений появился ряд новых модельных систем, полученных именно таким методом.

Из изложенного выше ясно, что если при построении такого рода моделей представлять продольную скорость $u$ с помощью набора функций, симметричных относительно координаты $\eta' = y/h(x,t) - 1$, то с той или иной степенью точности мы получим решения, которые в предыдущей секции были названы решениями первого типа.

В качестве примера упомянем здесь модель, используемую в широко известной серии статей Руйер-Квила и Манневилла ([1,2]), и покажем, что она описывает именно решения первого типа.

Там авторы для представления продольной скорости $u$ использовали базис, состоящий из трех полиномов:

$$g_0 = \eta - \frac{1}{2}\eta^2$$

$$g_1 = \eta - \frac{17}{6}\eta^2 + \frac{7}{3}\eta^3 - \frac{7}{12}\eta^4$$

$$g_2 = \eta - \frac{13}{2}\eta^2 + \frac{57}{4}\eta^3 - \frac{111}{8}\eta^4 + \frac{99}{16}\eta^5 - \frac{33}{32}\eta^6$$

К выбору такого базиса авторов фактически подтолкнули аналитические результаты, полученные при рассмотрении случая слабонелинейных возмущений при малых расходах, когда числа Рейнольдса имеют порядок единицы.

В этом базисе скорость $u$ записывается следующим образом:

$$u(x,\eta,t) = \sum_{j=0}^{2} b_j(x,t) g_j(\eta) \qquad (5)$$

С помощью преобразования сдвига $\eta \to \eta'$ модифицированный базис $g_j(\eta)$ Руйер–Квила, Манневилла принимает следующий вид:

$$g_0 = -\frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{1}{2}$$

$$g_1 = \frac{2}{3}\eta'^2 - \frac{7}{12}\eta'^4 - \frac{1}{12}$$

$$g_2 = -\frac{19}{32}\eta'^2 + \frac{51}{32}\eta'^4 - \frac{33}{32}\eta'^6 + \frac{1}{32}$$

Теперь видно, что полиномы $g_j$ содержат только четные слагаемые относительно координаты $\eta'$. Поэтому представляемые с помощью данного набора всевозможные выражения для продольной скорости $u$ будут симметричны относительно координаты $\eta'$. То есть, представление (5) аппроксимирует решения только первого типа.

Но модели, в которых используются в качестве базисных только симметричные функции, в принципе, не охватывают все возможные типы возмущений. При их использовании не удастся рассмотреть решения, которые в полосе $\eta' \in [-1,1]$ несимметричны по $\eta'$.

На основе выполненного анализа представляется целесообразным проверить, насколько результаты «симметричных» моделей чувствительны к расширению базиса за счет несимметричных функций.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНО-БЕГУЩИХ РЕШЕНИЙ

Для численного решения система (2)–(3) представлялась в безразмерном виде:

$$\varepsilon \,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{h}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta'}\left(\frac{QV}{h}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta'^2} + 3h + We\varepsilon^3 \,\mathrm{Re}\, h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \eta'} = 0 \qquad (6)$$

$$Q = V = 0, \quad \eta' = -1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta'} = 0, \; V = 0, \quad \eta' = 0$$

Здесь $\mathrm{Re} = \frac{g h_0^3}{3\nu^2}$ – число Рейнольдса, $We = \frac{\sigma}{\rho g h_0^2}$ – число Вебера, $\varepsilon = \frac{h_0}{l_0}$ – параметр длинноволновости, При обезразмеривании использовались характерные масштабы скорости - $u_0$, длины - $l_0$, толщины - $h_0$, времени - $l_0/u_0$.

В системе (6) введены новые функции $Q = hu, \quad V = hv$, линеаризующие второе уравнение системы (2).

В настоящей работе рассматриваются периодические стационарно–бегущие возмущения свободной поверхности, поэтому решения системы представляются в виде:

$[Q,h,V] = [Q,h,V](\tilde{x},\eta), \quad \tilde{x} = \alpha(x - ct)$.

Здесь $\alpha$ – волновое число решения.

При численном исследовании задачи использовался псевдоспектральный метод: функции, зависящие от поперечной координаты $\eta'$, раскладывались в ряд по полиномам Чебышева $T_i$:

$$Q = \sum Q_i(x) T_i(\eta'')$$
$$V = \sum V_i(x) T_i(\eta'') \quad (7)$$
$$\eta'' = 2\eta' + 1,$$

а функции, зависящие от продольной координаты, разлагались в ряд Фурье:

$$Q_i(x) = \sum Q^k{}_i \, \mathrm{e}^{ikx}$$
$$V_i(x) = \sum V^k{}_i \, \mathrm{e}^{ikx} \quad (8)$$
$$h(x) = \sum H^k \, \mathrm{e}^{ikx}$$

Вследствие вещественности функций $Q^{-k}{}_i = Q^{*k}{}_i$, $V^{-k}{}_i = V^{*k}{}_i, H^{-k} = H^{*k}$. Знак * означает операцию комплексного сопряжения.

Ограничиваясь первыми N гармониками в (8) и подставляя выражения (7)–(8) в систему (6), записанную для множества чебышевских узлов:

$$\eta''_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2M\pi}\right), j = 1..M,$$

приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений для коэффициентов $Q_i^k, V_i^k, H^k, c$.

Полученная таким образом задача решалась итерационным методом Ньютона–Канторовича:

$$[Q,h,V,c,\alpha]_{n+1} = [Q,h,V,c,\alpha]_n +$$
$$+ [\delta Q, \delta h, \delta V, \delta c, \delta\alpha]$$

Здесь символ $\delta$ означает вариацию соответствующего коэффициента. После линеаризации относительно вариаций задача сводится к решению СЛАУ:

$$A_0(x)\delta b(x) = \sum A_{k-k'} \delta b_{k'} = C_0$$

Для сравнения был также реализован альтернативный метод решения системы (6), в котором для функции $Q$ использовались только четные полиномы Чебышева, а для функции $V$ – только нечетные:

$$Q = \sum Q_{2i}(x)\left(T_{2i}(\eta') - 1\right)$$
$$V = \sum V_{2i+1}(x)\left(T_{2i+1}(\eta') - \eta'\right) \quad (9)$$

Такой выбор обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий на границе раздела и на твердой стенке.

При выполнении итераций в качестве начального приближения использовались результаты анализа линейной устойчивости плоскопараллельного течения, полученные в работе [6]. Параметр $\varepsilon$ выбирался таким образом, чтобы волновое число нейтральных возмущений при любых значениях чисел Рейнольдса было равно $\alpha_n = 1$. В этой точке зарождается первое семейство нелинейных стационарных режимов (см. рис. 1, кр. 1). Это семейство может быть непрерывно продолжено в область малых волновых чисел и в пределе $\alpha \to 0$ переходит в отрицательный солитон (солитон–вмятину). Для случая водных пленок в диапазоне чисел Рейнольдса [1÷30] анализ устойчивости решений данного семейства по отношению к возмущениям того же периода показал, что решения теряют устойчивость вблизи $\alpha \sim 0.5$. Здесь имеет место бифуркация Ландау-Хопфа и возникает периодический нестационарный режим (см., например, [7, 8]). Исследование устойчивости решений по отношению к удвоенному периоду дает новые точки бифуркации. Например, на рис.1 показано, как при Re=1 от решения первого семейства с волновым числом $\alpha = 0.9956$ ответвляется новое семейство стационарных решений (кр. 2). Оно зарождается в точке $\alpha = 0.4978$. При небольших числах Рейнольдса это второе семейство в пределе $\alpha \to 0$ переходит в положительный солитон (солитон – возвышение или горб).

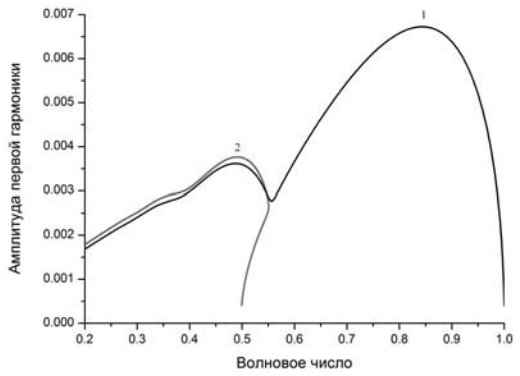


Рис.1 Зависимость амплитуды первой гармоники стационарно–бегущих возмущений от волнового числа.

При увеличении расхода жидкости и продвижении вглубь области линейной неустойчивости топология решений становится более сложной. Так, при числе Рейнольдса Re=8.99

второе семейство все еще продолжается до положительного солитона, а уже при Re=9 это семейство при $\alpha \to 0$ переходит в двугорбый отрицательный солитон (солитон с двумя вмятинами).

При этом решение, которое в пределе при $\alpha \to 0$ переходит в положительный одногорбый солитон, ответвляется от первого семейства с утроенной длиной волны. Пример такой бифуркации для Re=10 представлен на рис. 2 кривой 1.

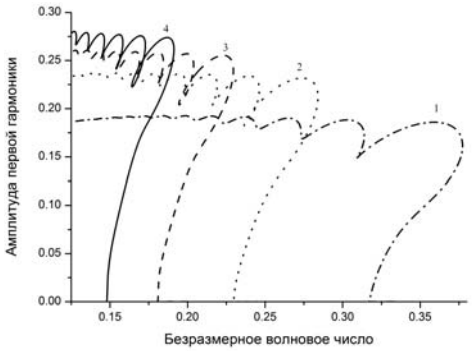


Рис.2 Зависимость амплитуды первой гармоники решений, переходящих в положительный солитон, от волнового числа.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса топологическая структура семейств стационарно-бегущих решений продолжает усложняться. Для иллюстрации этой сложности на рис. 3 показаны семейства решений, ответвляющиеся от первого семейства и в пределе по волновым числам переходящие в положительный одногорбый солитон. Но при этом характер ветвления у них различен: кривая 2 (Re=14) – решение ответвляется от первого семейства с длиной волны $\lambda = 4\lambda_1$, кривая 3 (Re=17) – с $\lambda = 5\lambda_1$, кривая 4 (Re=20) –. с $\lambda = 6\lambda_1$. Здесь $\lambda_1$ – длина волны решения первого семейства. В качестве примера на рис. 3 приведены линии тока для одногорбого положительного солитона при Re=15.

Каждый расчет выполнялся на базисах (7) с числом полиномов $T_i$ – 4, 8, 12, а также на «симметричном» базисе (9) с количеством полиномов $T_{2i}$ – 6. Различие в форме волны, полученной на базисах (7), содержащих соответственно 4 и 8 полиномов, было существенным в областях с большими градиентами толщины (на фронте волны и в области предвестника). Но даже в этих областях результаты, построенные на базисах из 8 и 12 полиномов, совпадали с графической точностью. Как видно из рис. 4, расчет формы возмущения в базисе (9), состоящем из 6 четных полиномов Чебышева для продольной скорости, показывает хорошее согласие с результатами на полном базисе из 12 полиномов.

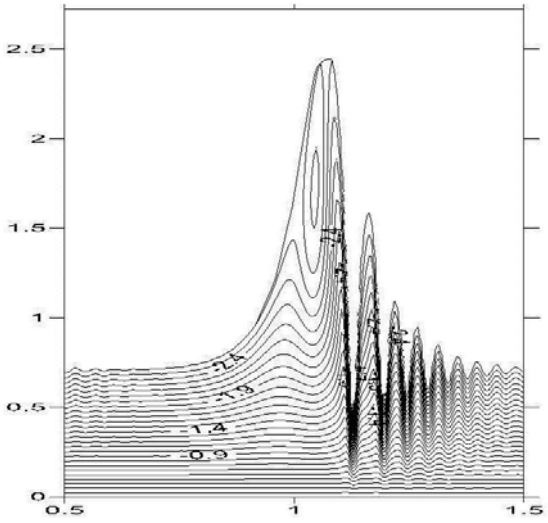


Рис.3 Линии тока положительного солитона.

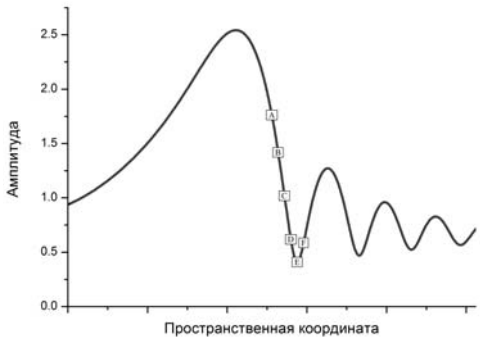


Рис.4 Форма волны, рассчитанная по полному и симметричному базисам.

Более детальное сравнение решений задачи включало исследование профилей скорости в различных сечениях волны. Наиболее интересны сечения на фронте волны. Здесь профиль существенно отличается от параболического, включает перегибы и возвратные течения. На рис. 5. продемонстрировано блестящее совпадение четной аппроксимации (базис (9)) решения в этой области с полным расчетом (базис (7)).

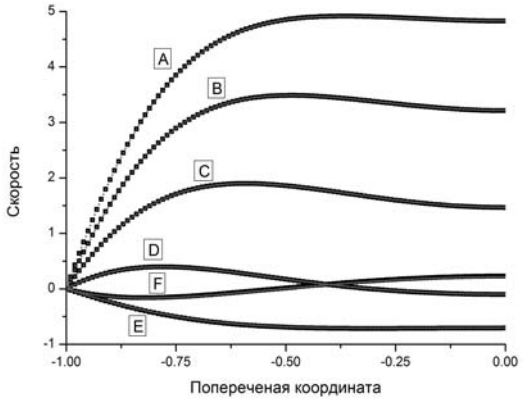


Рис.5 Профили продольной скорости в выбранных сечениях волны, рассчитанные по полному и симметричному базисам.

Разумеется, полученные данные не позволяют утверждать, что все стационарные решения системы (2) – (3) обладают в полосе $\eta' \in [-1,1]$ описанной выше симметрией. В определенном смысле нельзя считать это строго доказанным и для частного случая положительных солитонов. Однако полученные в ходе расчетов значения коэффициентов при четных и нечетных степенях $\eta'$ полного базиса (7) указывают на правомерность данной гипотезы – при степенях $2i$ и $2i+1$ они различались более чем на два порядка.

Это различие увеличивалось с увеличением числа учтенных в (7) полиномов. Поэтому можно сделать вывод о допустимости применения более коротких и удобных базисных функций, опирающихся на симметрию (4) системы (2) – (3) при расчете стационарно–бегущих режимов волнового движения пленки.

## ВЫВОДЫ

Проведено исследование дивергентной системы уравнений для моделирования динамики нелинейных волн на свободно стекающей по вертикальной плоскости пленке жидкости. Обнаружено, что в расширенной по поперечной координате расчетной области $\eta' \in [-1,1]$ система уравнений (2) с граничными условиями (3) инвариантна относительно преобразований четности (4). Продемонстрировано применение данной симметрии при численном решении задачи спектральными и псевдоспектральными методами. Выполнен анализ ветвлений стационарно–бегущих волновых режимов на пленке, в ходе которого показана сложность топологической структуры решений системы (2-3). Численно подтверждено, что при умеренных числах Рейнольдса стационарные решения системы в расширенной по поперечной координате области обладают обнаруженной симметрией.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ruyer-Quil C., Manneville P. Modeling film flows down inclined planes // Eur. Phys. J. B. 1998. V. 6. No 2. P. 277–292.
2. Ruyer-Quil C., Manneville P. Improved modeling of flows down inclined planes // Eur. Phys. J. B. 2000. V. 15. No.2. P. 357–369.
3. Scheid B., Ruyer-Quil C., Manneville P. Wave patterns in film flows: modelling and three-dimensional waves // J. Fluid Mech. 2006. V. 562. P. 183–222.
4. Trifonov Yu. Ya., Stability and bifurcations of the wavy film flow down a vertical plate: the results of integral approaches and full-scale computations // Fluid Dyn. Res. 2012. V. 44. P. 031418 .
5. Алексеенко С. В., Архипов Д. Г., Цвелодуб О. Ю. Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Доклады РАН. 2011. Т. 436. № 1. С. 43–46.

   Alekseenko S. V., Arkhipov D. G., Tsvelodub O. Yu., Divergent system of equations for a fluid film flowing down a vertical wall, Doklady Physics. 2011. V.56. P. 22–25
6. Arkhipov D.G., Kachulin D.I., Tsvelodub O.Yu. Comparison of models for wave regimes of liquid film downflow in the linear approximation, J. of Appl. Mech. and Techn. Phys., 53, 5, 647-656 (2012)
7. Trifonov Yu. Ya.,Tsvelodub O. Yu., Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film. Waves of the first family and their stability, J. Fluid Mech., 229, 531-554 (1991)
8. Chang H.-C., Demekhin E. A., Kopelevich D. I., Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film, J. Fluid Mech., 250, 433-480 (1993)