УДК 536.24.66:015.23

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В МНОГОСЛОЙНЫХ ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЯХ И СООРУЖЕНИЯХ

Садыков Р.А.

Казанский Государственный Архитектурно-Строительный Университет, Казань, Россия

Работа выполняется по приоритетному направлению „Энергоэффективность, энергосбережение и ядерная энергетика“ в рамках государственого контракта (гранта) номер 14.BBB.21.0039.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются вопросы переноса теплоты, воздухопроницания и влаги в одно- и многослойных ограждающих конструкциях (МОК) зданий, сооружений, инженерных, тепловых и электрических сетях, обусловленные действием внешних климатических факторов и работой систем отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха. Рассмотрена общая постановка задачи процессов переноса с учетом внутренних объемных или локальных источников (стоков) переноса субстанции. Разработана обобщенная математическая модель (ММ) нестационарного переноса (теплоты, вещества и т.п.) для тел различной канонической формы (полупространство, пластина, полые цилиндр и шар) и их аналогов. В частных случаях ММ учтены зависимости теплофизических характеристик (сплошной изотропной) среды, параметров граничных условий, мощностей объемных источников (стоков) переноса субстанций от потенциалов переноса (температуры, влагосодержания и др.) или от координат и времени. Рассмотрены аналитические решения поставленной обобщенной задачи для неустановившихся и стационарных процессов переноса субстанций при обощенных граничных условиях (первого, второго, третьего и смешанного рода) на внешнем контуре исследуемой области. При постоянных параметрах системы нестационарных процессов переноса показан алгоритм решения дифференциальных уравнений переноса методом Фурье при переменных параметрах краевых условий разного рода.

Полученные ММ, аналитические и приближенные решения прямых краевых задач переноса приведены к критериальному виду, что удобно для масштабных переходов, практических приложений, параметрического анализа полученных решений, постановки задач оптимизации и автоматизации систем управления технологическими процессами.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время значение теплофизики зданий и различных сооружений усиливается в связи с широким применением индустриальных конструкций из современных материалов, повышением требований к комфортности внутреннего климата помещений, а также развитием строительства в районах с резко выраженными климатическими воздействиями. Поэтому оптимальное формирование полей потенциалов переноса тепла и вещества в многослойных ограждающих конструкциях (МОК) с помощью автоматизированных систем управления теплогазоснабжения, вентиляции и кондиционирования воздуха в значительной степени определяет выбор проектного решения, экономичность технических и технологических процессов, массоемкость, габариты и эксплуатационные характеристики инженерного оборудования, здания или всего сооружения в целом.

Нормативные данные и литературный анализ исследований [1-4] показывает, что расчёт тепловлажностных характеристик, наружных ограждающих конструкций в основном проводится при установившихся условиях параметров состояния строительного объекта и постоянных теплофизических свойствах отдельных слоев МОК. Кроме того в подобных расчётах

и ММ не учитывается наличие внутренних источников (или стоков) тепла и вещества во временных периодах конденсации и испарения влаги в МОК [2-5] в периоды с отрицательными (градусо-сутки отопительного периода) и положительными температурами наружного воздуха ($t \geq 8°C$). При стационарных условиях диффузии водяного пара расчёт влажностного режима ограждающих конструкции (ОК) в основном проводят только приближенно – графическим методом [1-4]. Поэтому проблема обобщенной постановки краевой задачи процессов переноса субстанций в МОК и анализ возможностей её аналитического и приближенного решения в зависимости от заданных условий однозначности является актуальной.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

На основании общепринятых допущений, учета фильтрации воздуха через ОК и наличия объёмных положительных или отрицательных источников переноса субстанций сформулирована обобщенная система нелинейных дифференциальных уравнений нестационарного конвективного переноса в МОК:

$$\mathrm{D}\vec{s}[\vec{\Pi}(\vec{x},\tau)] + \mathrm{sgn}\,[\vec{J}] < \nabla, \vec{J}[\vec{\Pi}(\vec{x},\tau)] > + \mathrm{sgn}[\vec{I}]\vec{I}[\vec{\Pi}(\vec{x},\tau)] = \vec{0}, \quad (1)$$

где $\vec{s}$ - вектор-столбец субстанций (скалярные величины), $\vec{J}$ – вектор-столбец потоков (векторные величины), $\vec{\Pi}$ – вектор-строка потенциалов переноса или параметров состояния системы (скалярные величины), $\vec{I}$ – вектор-столбец положительных или отрицательных объемных источников переноса субстанций (скалярные величины), D - производная Лагранжа, $\nabla(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ - оператор Гамильтона, $\vec{x}(x, y, z)$ – вектор пространственных координат, τ - время, $\mathrm{sgn}[\cdot]$ – функция знака, $<\cdot,\cdot>$ - скалярное произведение векторов.

Система (1) совместно с уравнениями Навье-Стокса, неразрывности, термодинамических параметров состояния системы и условиями однозначности образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений (СДУ) нелинейного конвективного переноса субстанций. Аналитическое решение представленной СДУ осуществимо только при определенных упрощениях. Применительно к неподвижным ОК СДУ (1) после ряда допущений и преобразований относительно потенциалов нестационарного переноса можно записать в виде:

$$\vec{\Pi}_\tau(\vec{x},\tau) + \mathrm{sgn}\,[\vec{J}] < \nabla, \vec{J}[\vec{\Pi}(\vec{x},\tau)] > + \mathrm{sgn}[\vec{I}]\vec{I}[\vec{\Pi}(\vec{x},\tau)] = \vec{0}. \quad (2)$$

Если параметры системы (теплофизические, термодинамические, физико-химические и др. характеристики) постоянны, то уравнение (2) с обобщенными условиями однозначности (обобщенные начальные и граничные условия первого, второго, третьего и смешанного рода) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \vec{\Pi}_\tau(\vec{x},\tau) = [K]\Delta\Pi_\tau \pm \vec{I}\left[\vec{\Pi}(\vec{x},\tau)\right], & (3) \\ \tau > \tau_0 \ , \ \vec{x} \in \Omega \ , & \\ \vec{\Pi}(\vec{x},\tau_0) = \vec{\Pi}_0(\vec{x}), \ \vec{x} \in \Omega \ , & (4) \\ \gamma_{1,i} < \nabla\vec{\Pi}(\vec{x},\tau), \vec{e} >|_F - \gamma_{2,i}\vec{\Pi}(\vec{x},\tau) = -\vec{\beta}_i(\vec{x},\tau), & \\ \tau > \tau_0, \vec{x} \in F, & \\ F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_i, \ \ i = \overline{1,m} \ , & (5) \end{cases}$$

где $[K]$ в общем случае квадратная матрица постоянных коэффициентов для взаимосвязанных процессов переноса [5] или вектор – столбец для невзаимосвязанных, $\vec{\Pi}_\tau(\vec{x},\tau)$ – частная производная потенциалов переноса по τ, Δ – Лапласиан, $\vec{\Pi}_0(\vec{x})$ – вектор-функция начального распределения потенциалов переноса, τ_0 – начальное время процесса, F (и F_i) – кусочно-гладкая поверхность контура (и его часть) области Ω изменения пространственных переменных $\vec{x}$, $\vec{e}$ – единичный вектор, $\gamma_{l,i} = const \geq 0, \ l = 1,2$.

Решения краевой задачи (3)-(5) можно построить методом Фурье [7,8]. Для этого предварительной заменой:

$$\vec{\Pi}(\vec{x},\tau) = \vec{U}(\vec{x},\tau) + \vec{v}\left[\vec{x}, \gamma_{l,i}, \vec{\beta}_i(\vec{x},\tau)\right], \quad (6)$$

перевёдём краевую задачу (3)-(5) относительно $\vec{\Pi}(\vec{x},\tau)$ с неоднородными граничными условиями к краевой задаче с однородными граничными условиями относительно $\vec{U}(\vec{x},\tau)$:

$$\begin{cases} \left[\vec{U}(\vec{x},\tau)\right]_\tau = [K]\Delta\vec{U}(\vec{x},\tau) \pm \vec{I}_*(\vec{x},\tau), & (7) \\ \vec{U}(\vec{x},\tau_0) = \vec{U}_0(\vec{x}), & (8) \\ \gamma_{1,i} < \nabla\vec{U}, \vec{e} >|_F - \gamma_{2,i}\vec{U} = \vec{0}, & (9) \end{cases}$$

где $\vec{I}_*(\vec{x},\tau)$ - вектор-столбец модифицированных источников переноса.

Далее частные решения однородной краевой задачи (7)-(9) (при $\vec{I}_*(\vec{x},\tau)=0$) ищем в форме с разделяющимися переменными:

$$\vec{U}(\vec{x},\tau)=T(\tau)X(\vec{x}). \quad (10)$$

Подставляя (10) в однородную краевую задачу получаем известную задачу Штурма-Лиувилля для нахождения собственных функций $X(\vec{x})$ и собственных чисел υ:

$$\begin{cases}\Delta X(\vec{x})+\nu^2X(\vec{x})=0, & (11)\\ \gamma_{1,i}<\nabla X(\vec{x},\tau),\vec{e}>|_F-\gamma_{2,i}X(\vec{x})=0, & (12)\end{cases}$$

Найденные координатные функции $X_n(\vec{x})$ ортогональны в области Ω относительно веса $\rho(\vec{x})$, а $\nu_n\geq 0$, тогда

$$\vec{U}(\vec{x},\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(\tau)X_n(\vec{x}). \quad (13)$$

Разлагая далее $\vec{I}_*(\vec{x},\tau)$ в ряд Фурье по $X_n(\vec{x})$ получим:

$$\vec{I}_*(\vec{x},\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n(\tau)X_n(\vec{x}), \quad (14)$$

где

$$k_n=\frac{1}{H_n}\int_{\Omega}I_*(\vec{x},\tau)X_n(\vec{x})\rho(\vec{x})dV \quad (15)$$

$$H_n=\int_{\Omega}X_n^2(x)\rho(\vec{x})dV.$$

После всех преобразований и подстановки (13) в (7) и с учетом (11) и (14) уравнение процессов переноса примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(\tau)X_n(\vec{x})=-k\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n^2T_n(\tau)X_n(\vec{x})+\sum_{n=1}^{\infty}k_n(\tau)X_n(\vec{x}), \quad (16)$$

откуда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка относительно $T_n(\tau)$:

$$T_n'(\tau)+k\nu_n^2T_n(\tau)-k_n(\tau)=0. \quad (17)$$

Начальные значения $T_n(\tau_0)$ следуют из (8) после подстановки в него (13) и разложения $U_0(\vec{x})$ в ряд Фурье по $X_n(\vec{x})$, тогда

$$T_n(\tau_0)=\frac{1}{H_n}\int_{\Omega}U_0(\vec{x})X_n(\vec{x})\rho(\vec{x})dV. \quad (18)$$

Из решения ОДУ (17) с начальным условием (18) находим функции:

$$T_n(\tau)=e^{-k\nu_n^2\tau}\left[T_n(\tau_0)+\int_{\tau_0}^{\tau}k_n(t)e^{k\nu_n^2t}dt\right], \quad (19)$$

и решение краевой задачи (3)-(5):

$$\vec{\Pi}(\vec{x},\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(\tau)X_n(\vec{x})+\vec{\upsilon}\left[\vec{x},\gamma_{l,i},\beta_i(\vec{x},\tau)\right]. \quad (20)$$

Для тел канонической формы (полупространство, пластина, полые цилиндр и шар) и постоянных коэффициентов переноса уравнение (3) записывается в виде:

$$\vec{\Pi}_\tau(r,\tau)=kr^{-\Gamma}\left[r^\Gamma\vec{\Pi}_r(r,\tau)\right]_r+\operatorname{sgn}\left[\vec{I}\right]\vec{I}\left[\vec{\Pi}(r,\tau)\right], \quad (21)$$

$$\tau>\tau_0,\quad r_0<r<r_1,\quad \Gamma=\overline{0,2},$$

или в критериальной форме

$$\vec{P}_{Fo}(R,Fo)=R^{-\Gamma}\left[R^\Gamma\vec{P}_R(R,Fo)\right]_R+\operatorname{sgn}\left[\vec{I}_\vartheta\right]\vec{I}_\vartheta\left[\vec{P}(R,Fo)\right], \quad (22)$$

$$Fo>Fo_0,\quad 0<R<1,\quad \Gamma=\overline{0,2},$$

где в (21) r – текущая пространственная координата, Γ – геометрический фактор формы тела ($\Gamma=0$ для полупространства и пластины, $\Gamma=1$ для полого цилиндра и $\Gamma=2$ для полого шара), $\vec{\Pi}_r(r,\tau)$ – производная по текущей координате r, а в (22) - $\vec{P},\vec{P}_{Fo}$ – соответственно безразмерный вектор потенциалов переноса и его производная по переменной Фурье, Fo, Fo_0 - соответственно тепло- или массообменный критерий Фурье и критерий Фурье при $\tau=\tau_0$, $R=(r-r_0)/(r_1-r_0)$ – безразмерная текущая координата, $\vec{I}_\vartheta$ – безразмерный вектор положительных или отрицательных объемных источников переноса субстанций.

Ряд аналитических решений уравнения (21) для определенных Γ и их аналогов при переменных внешних (климатических) параметрах граничных условий различного рода можно найти в литературе [7-10 и др.].

Для установившихся нелинейных процессов переноса в МОК с учетом фильтрации воздуха, конденсации или испарении влаги дифференциальное уравнение (21) относительно одного из потенциалов переноса будет:

$$\left[k(\Pi)\Pi_r\right]_r + r^{-1}\Gamma k(\Pi)\Pi_r + \operatorname{sgn}[G]G(\Pi)c_p(\Pi)\Pi_r + \operatorname{sgn}[I]I(\Pi) = 0 \quad , \qquad (23)$$

где $\Pi = \Pi(r) \equiv t(r)$ – температура, $k(\Pi) \equiv \lambda(t)$ – коэффициент теплопроводности, G – удельный расход воздуха, c_p – изобарная теплоемкость воздуха.

Возможные случаи аналитического решения нелинейного неоднородного дифференциального уравнения теплопереноса (23) в критериальной форме при различных параметрах системы представлены в [5].

ВЫВОДЫ

Сформулирована обобщенная замкнутая система дифференциальных уравнений нелинейного нестационарного конвективного переноса субстанций в многослойных ограждающих конструкциях.

Применительно к неподвижным объектам (ограждающие конструкции зданий, сооружений, инженерных, тепловых и электрических сетей) формализована математическая модель с обобщенными внешними граничными условиями первого, второго, третьего и смешанного рода.

Показаны условия и алгоритм аналитического решения прямой нестационарной краевой задачи методом Фурье при переменных параметрах граничных условий разного рода.

Приведена постановка и указаны возможные решения краевых нестационарных и стационарных нелинейных задач для тел канонической формы (полупространство, пластина, полый цилиндр и полый шар) и их аналогов.

Полученные математические модели, аналитические и приближенные решения поставленных краевых задач переноса привидены к критериальному виду, что удобно для масштабных переходов, практических приложений, параметрического анализа полученных решений, постановки задач оптимизации и автоматизации систем управления технологическими процессами.

ЛИТЕРАТУРА

1. СНиП 23-02-2003. Тепловая защита зданий. – М.:2003. – 31 с.
   SNiP 23-02-2003. Thermal shielding of buildings. – M.: 2003. – 31p.
2. Фокин К. Ф. Строительная теплотехника ограждающих частей зданий. М., АВОК-ПРЕСС, 2006, 256 с.
   Fokin K. F. Constructional heat engineering of the shielding parts of a building. M.: the AVOK-PRESS, 2006, 256 p.
3. Богословский В. Н. Строительная теплофизика (теплофизические основы отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха). С-Пб.: Изд-во «АВОК Северо-Запад», 2006.–400 с.
   Bogoslovskiy V.N., 2006. Constructional thermophysics (thermophysical basis of heating, ventilation and air conditioning). Publishing house “Northwest AVOK”, 2006.–400 p.
4. Hugo Hens. Building physics – Heat, Air and Moisture. – John Willey and Sons Limited. 2007. – 270 p.
5. Садыков Р. А. Теория процессов стационарного нелинейного переноса с учетом воздухопроницаемости, конденсации или испарения парообразной влаги (статья). Известия КГАСУ N3 (17), 2011, с.268-276.
   Sadykov R.A. Theory of stationary nonlinear transfer processes considering air permeability, condensation or evaporation vaporous liquid(article). KGASU news N3(17), 2011, pp. 268-276.
6. Садыков Р. А. Расчет теплотехнических характеристик ограждающих конструкций с учетом термодиффузии и фильтрации влаги. Материалы Международной научно-технической конференции «Теоретические основы теплогазоснабжения и вентиляции», М., МГСУ, 2005, с. 53-57.
   Sadykov R. A. Calculation of thermo-technical characteristics of shielding constructions taking into account thermo diffusion and moisture filtration. // Materials of the International scientific and technical conference «Theoretical bases of heat and gas

© Садыков Р.А.

supply and ventilation», M.: МГСУ, 2005, pp. 53-57.

7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1996.-724 с.

   Tikhonov A. N., Samarskiyi A. A. Equations of mathematical physics. M.: Science, 1996.-724 p.

8. Карташов Э. М. Аналитические методы теории теплопроводности твердых тел. М.:Высшая школа, 2001. -550 с.

   Kartashov E. M. Analytical methods of thermal conductivity of solid bodies.M.: High School, 2001. -550 p.

9. Леонтьев А. И. Теория тепломассообмена. Изд-во МГТУ, 1997. – 683 с.

   Leontyev A.I. Heat and mass transfer theory. Publisher MGTU, 1997. – 683 p.

10. Кудинов В. А., Калашников В. В., Карташов Э. М. и др. Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Энергоатомиздат, 1997. – 425 с.

    Kudinov V.A., Kalashnikov V.V. , Kartashov E. M. and others. Heat and mass transfer and thermoelasticity in multilayered constructions. M.: Energoatomizdat, 1997. – 425 p.