УДК 532.51

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА СТЕКАЮЩЕЙ ТОНКОЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ, УВЛЕКАЕМОЙ ТУРБУЛЕНТНЫМ СПУТНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Вожаков И.С., Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах № 11.G34.31.0035 (ведущий ученый - В. Е. Захаров, ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет») и Президента РФ для господдержки молодых ученых (№ МК-5997.2014.1).

АННОТАЦИЯ

Выведена новая система уравнений для моделирования динамики длинноволновых возмущений на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости, стекающего по вертикальной плоскости и обдуваемого турбулентным спутным потоком газа. Проведен анализ линейной устойчивости невозмущенного течения. Обнаружено, что при умеренных числах Рейнольдса жидкости линейные модели Бенджамина и переноса граничных условий на невозмущенный уровень для возмущенного течения газа дают качественно похожие результаты. При уменьшении числа Рейнольдса, отличия между результатами, полученными по разным моделями турбулентности, становятся более выраженными. В случае малых чисел Рейнольдса жидкости из данной системы уравнений получается одно эволюционное уравнение на отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Представлены некоторые решения этого уравнения.

ВВЕДЕНИЕ

Совместное течение жидкости и газа - классическая задача гидродинамики. Применительно к задачам теплофизики и химической технологии часто имеет место турбулентное течение газа над тонким, покрытым волнами слоем жидкости. Решение этой проблемы в полной сопряженной постановке связано со значительными вычислительными трудностями, поэтому зачастую выделяют два этапа моделирования: определение напряжений газа на поверхности пленки и последующий расчет эволюции волн в жидкости. Скорость жидкости значительно меньше характерной скорости газа, поэтому поверхность раздела полагают жесткой и неподвижной. Кроме того, вследствие малости толщины пленки, влияние возмущений границы раздела на скорости в газе можно считать линейным. В силу этого, задача вычисления нормальных и касательных напряжений газа на поверхности сводится к рассмотрению влияния на них отдельных пространственных гармоник. На втором этапе исследования совместного течения исследуется динамика нелинейных волн на поверхности пленки жидкости.

В данной работе рассматривается второй этап исследования - моделирование динамики нелинейных волн на пленке жидкости, стекающей под действием силы тяжести в известном поле напряжений на границе раздела фаз. Полная постановка задачи для жидкости включает уравнения Навье-Стокса и неразрывности с соответствующими кинематическими и динамическими граничными условиями. В ней серьезной проблемой является неопределенность положения подвижной границы, которое определяется в процессе решения. Целью работы является получение и исследование модельной системы уравнений, описы-

© Вожаков И.С., Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г.

вающей эволюцию длинноволновых возмущений границы раздела при умеренных числах Рейнольдса жидкости, а в случае малых чисел Рейнольдса жидкости получение эволюционного уравнения на толщину пленки.

Если исключить из рассмотрения эффекты уноса капель и осушения твердой поверхности, то область течения жидкости является односвязной. Наличие поверхностного натяжения обеспечивает отсутствие острых кромок на поверхности пленки. В этих условиях функция

$$y = h(x,t)$$

определяющая положение точек границы области, часто является однозначной. Тогда существует непрерывно дифференцируемое преобразование координат, отображающее область течения жидкости в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \qquad \eta = y/h(x,t) \qquad t = t. \tag{1}$$

Новые переменные (1) не ортогональны, поэтому обычная формулировка уравнений движения в векторной форме неприменима. По этой причине часто ограничиваются простой заменой переменных в исходных уравнениях без преобразования векторов и тензоров. В результате получаются системы уравнений для декартовых компонент скорости жидкости. Эти компоненты, разумеется, не образуют вектор в новой криволинейной системе координат (1).

Другой способ выполнить преобразование (1) предполагает использование новых переменных в уравнениях, записанных в тензорной, инвариантной относительно систем координат, форме. Используя такую запись, для случая пленки, свободно стекающей по вертикальной плоскости в поле тяжести, в приближении длинноволновости возмущений в работе [1] была получена система:

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} = gh - \frac{h}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho h}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$$

Здесь h - толщина пленки, p - давление, u и v - контравариантные компоненты продольной и поперечной скорости, соответственно, ρ - плотность, μ - динамическая вязкость жидкости.

Из граничных условий прилипания жидкости на гиперповерхности $\eta = 0$ следует:

$$u(x,0,t) = 0, \qquad v(x,0,t) = 0$$

На гиперповерхности $\eta = 1$ условия непротекания принимают вид:

$$v \equiv \frac{d\eta}{dt} = 0, \qquad v(x,1,t) = 0$$

Учитывая наличие скачка нормального напряжения на поверхности, пренебрегая влиянием продольного градиента давления на течение пленки жидкости, и выбрав характерные масштабы скорости - u_0, длины - l_0, толщины - h_0, времени - l_0/u_0, и напряжений p, τ - ρu_0^2, перепишем систему уравнений в безразмерных переменных. В итоге, система уравнений принимает вид:

$$\varepsilon \mathrm{Re}\left(\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta}\right) = \varepsilon^2 \mathrm{ReW}hh_{xxx} -$$

$$-\varepsilon^2 \mathrm{Re}h\int ih_k k^2 p_k e^{ikx}dk + \frac{u_{\eta\eta}}{h} + \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}h \tag{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial \eta} = 0$$

Граничные условия запишутся в виде:

$$u(x,0,t) = 0, v(x,0,t) = 0, v(x,1,t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,1,t) = h\mathrm{Re}\tau_0(1 + \varepsilon\int h_k k\tau(k)e^{ikx}dk)$$

Здесь введены безразмерные параметры: число Рейнольдса - Re, число Вебера - W, число Фруда - Fr, и отношение толщины пленки к характерной длине волны - ε:

$$\varepsilon = \frac{h_0}{l_0}, \mathrm{W} = \frac{\sigma}{\rho l_0 u_0^2}, \mathrm{Fr} = \frac{u_0^2}{gh_0}, \mathrm{Re} = \frac{\rho h_0 u_0}{\mu}$$

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Для определения линейного отклика касательного $\tau(k)$ и нормального $p(k)$ напряжений на возмущения границы раздела фаз рассмотрим течение газа над волнистой поверхностью пленки жидкости. В работе [2] приведены наиболее популярные из используемых для этой цели, линейные модели турбулентного течения над волнистой стенкой.

Первая модель, основанная на переносе граничных условий на невозмущенный уро-

вень (МПГУ), приводит к уравнению Орра-Зоммерфельда:

$$\left(v_g U'' - U(v_g'' - v_g)\right) = i\delta k_g \left(v_g'''' - 2v_g'' + v_g\right) \qquad (3)$$

Здесь $\delta = \nu / u^*$ - толщина пограничного слоя, ν - коэффициент кинематической вязкости газа, u^* - динамическая скорость, $k_g = 2\pi / \lambda_{cm}$, λ_{cm} - период волнистости стенки. Известная модель Бенджамина (МБ) для вычисления тензора напряжений газового потока сводится к рассмотрению уравнения:

$$v_g U'' - U(v_g'' - v_g) =$$

$$= i\delta k\left(v_g'''' - 2v_g'' + v_g + (U'''' - 2U'')e^{-y}\right)$$

При решении уравнений брался профиль осредненной скорости течения газа, который использовался в работе [2]. Он имеет следующий вид:

$$U(y/\delta)/u^* = 4.33\ln(1 + 0.091 y/\delta) -$$

$$-0.915\ln(1 - 0.092 y/\delta + 0.0108 y^2/\delta^2) +$$

$$+5.59\arctan(0.116 y/\delta - 0.492) + 2.56$$

Решив данные дифференциальные уравнения, находим соответствующие значения $\tau(\delta k_g)$ и $p(\delta k_g)$. Данные, полученные по моделям МПГУ и МБ использовались для решения краевой задачи. В результате были получены зависимости $c \equiv c_r + ic_i = c(k)$. Возмущения, для которых мнимая часть комплексной скорости $c_i > 0$ ($c_i < 0$) неустойчивы (устойчивы) и экспоненциально нарастают (затухают) со временем.

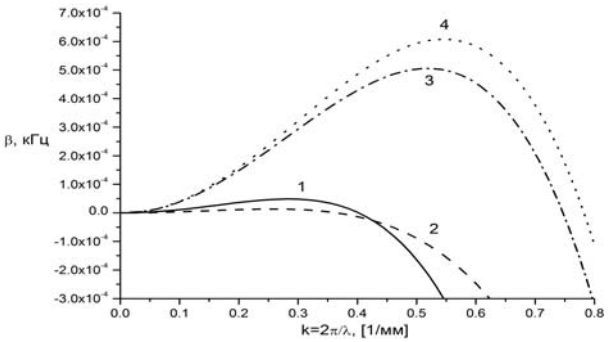

Рис.1 Зависимость инкремента от волнового числа. Re=1

На рисунках 1 и 2 представлены графики инкрементов $\beta \equiv kc_i$ в зависимости от волнового числа для двух характерных значений числа Рейнольдса пленки воды, обдуваемой потоком воздуха со среднерасходными скоростями 5 м/с и 10 м/с, соответственно, в канале с гидравлическим диаметром 1 см. На этих рисунках показаны результаты для свободно стекающей пленки (кривые 1), для пленки с учетом только стационарного касательного напряжения со стороны газовой фазы (кривые 2), и результаты расчетов по моделям МПГУ (кривые 3) и МБ (кривые 4).

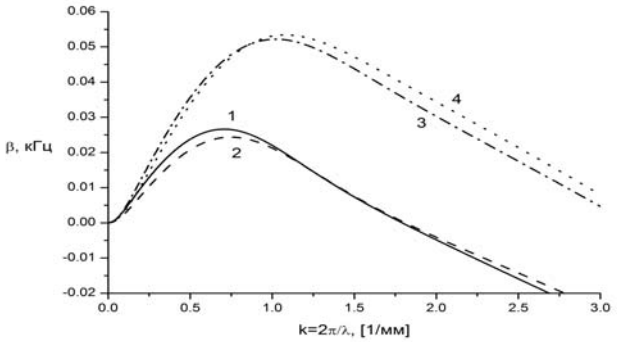

Рис.2 Зависимость инкремента от волнового числа. Re=20

Видно, что учет влияния стационарной составляющей трения газового потока стабилизирует пленку (см. кривые 1, 2), тогда как учет пульсаций касательного напряжения приводит к обратному эффекту (см. кривые 3, 4). Как можно заметить, графики функций, полученные с помощью модели переноса граничных условий и по модели Бенджамина, качественно похожи. Области неустойчивых возмущений отличаются друг от друга всего на несколько процентов, причем для модели Бенджамина она немного шире. С увеличением числа Рейнольдса пленки, различия в данных, полученных по МПГУ и МБ, уменьшаются (ср. кривые 3, 4 на рис. 1 и 2).

Полученные результаты согласуются с результатами работ [3, 4]. Там исследовалась устойчивость пленочных течений, как на основе интегральной модели, так и уравнения Орра-Зоммерфельда.

ВЫВОД ЭВОЛЮЦИОННОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Известно, что для пленки, свободно стекающей по вертикальной плоскости, в случае малых расходов (Re~1) задача сводится к одному эволюционному уравнению на возмущение толщины пленки. Для пленки, увлекаемой газом, аналогичный результат можно получить из системы (2). Вследствие малости толщины пленки по сравнению с длиной волны, решение системы представляется в виде рядов по малому параметру ε. Кроме

этого, вводятся в рассмотрение медленное и быстрое времена:

$$t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t$$

В результате, в нулевом приближении получаем следующее уравнение на толщину пленки:

$$h_{t_0} + \frac{Re}{Fr} h^2 h_x + Re\,\tau_0 h h_x = 0$$

Для первого порядка приходим еще к одному уравнению на h:

$$\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\begin{array}{l} \frac{1}{3}\varepsilon ReW h^3 h_{xxx} + \\ + \frac{2}{15}\frac{Re^3}{Fr^2} h^5 h_x (h + \tau_0 Fr) + \\ + \frac{1}{2} Re h^2 \tau_0 \int h_k k \tau(k) e^{ikx} dk \end{array} \right) = 0$$

Здесь τ_0 – безразмерная невозмущенная составляющая касательного напряжения газа на поверхности пленки. В случае спутного течения газа $\tau_0 > 0$.

Объединяя уравнения и возвращаясь к общему времени t, получаем одно модельное уравнение на толщину пленки:

$$h_t + \frac{Re}{Fr} h^2 h_x + Re\,\tau_0 h h_x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\begin{array}{l} \frac{1}{3}\varepsilon ReW h^3 h_{xxx} + \\ + \frac{2}{15}\frac{Re^3}{Fr^2} h^5 h_x (h + \tau_0 Fr) + \\ + \frac{1}{2} Re h^2 \tau_0 \int h_k k \tau(k) e^{ikx} dk \end{array} \right) = 0 \qquad (3)$$

Напомним здесь, что при выводе уравнения (3) использовалось приближение малых чисел Рейнольдса ($\mathrm{Re} \sim 1$). Кроме того, при выводе системы (2) полагалось, что число Вебера велико – $W\varepsilon \sim 1$. Уравнение (3) с точностью до обозначений совпадает с уравнением, полученным в работе [5]). В случае, когда рассматриваются пространственные периодические решения уравнения (3), интегральное слагаемое заменяется соответствующим рядом.

Если ограничиться рассмотрением возмущений малой, но конечной амплитуды, и снова ввести медленное и быстрое времена, то с помощью преобразования:

$$h = 1 + \varepsilon h_1, \; h_1 = AH, \; t \to b\varepsilon t$$

$$b = \frac{We\,\mathrm{Re}\,\varepsilon}{3}, \; A = \frac{2Frb}{\mathrm{Re}(2 - Fr\,\tau_0)}$$

из уравнения (3) получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + 2H\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + B\int_{-\infty}^{\infty} ik^2\,\tau(k)\,H_k(k,t)e^{ikx}dk = 0$$

Здесь $B = \frac{\mathrm{Re}\,\tau_0}{2b} \equiv \frac{3\tau_0}{2W\varepsilon}$

Если пренебречь в (3) нелинейным членом и представить его решение в виде:

$$H \sim \exp(ik(x - ct))$$

то для комплексной фазовой скорости c получим:

$$c = i(k - k^3) + Bk\tau(k) \qquad (4)$$

Возмущения будут неустойчивы, если мнимая часть c будет больше нуля. Учитывая, что у нейтрального возмущения мнимая часть скорости $c_i = 0$, из (4) для его волнового числа k_n имеем:

$$1 - k_n^2 + B\tau_{im}(k_n) = 0 \qquad (5)$$

Из (5) видно, что выбор характерного продольного масштаба l_0 удобно сделать так, чтобы в случае свободно стекающей пленки ($B = 0$) нейтральное волновое число $k_n = 1$.

Таким образом, в случае малых чисел Рейнольдса задача исследования возмущений на поверхности горизонтальной пленки жидкости, увлекаемой потоком газа, сводится к рассмотрению решений одного нелинейного интегро–дифференциального уравнения.

Для нахождения периодических по x решений уравнения (3) функция H представляется в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x,t) = \sum_n H_n(t)\exp(iknx) \qquad (6)$$

Так как H ¾ вещественная функция, то $\overline{H}_{-n} = H_n$. Черта означает операцию комплексного сопряжения.

После подстановки (6) в уравнение (3) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на Фурье-гармоники $H_n(t)$. Полагая, что все $H_n(t)$ с индексами $|n| \geq N$ равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу.

При исследовании эволюции периодических возмущений в качестве условия нормировки будем полагать, что среднее отклонение толщины от невозмущенного уровня равно нулю.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПО ЭВОЛЮЦИОННОМУ МОДЕЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Будем использовать данные по пульсациям трения, полученные по модели Бенджамина. Как видно, например, из рис. 1, 2 (см. кривые 4), область неустойчивых волновых чисел k лежит в интервале $0 \div k_n$. В этом смысле ситуация аналогична той, которая имеет место для широко известного уравнения Курамото-Сивашинского (К-С). Известно, что эволюционное поведение периодических решений этого уравнения существенно зависит от того, сколько имеется стационарно-бегущих решений с данным волновым числом (см., например [6]). Так как области неустойчивых волновых чисел линейных возмущений у уравнений К-С и (3) топологически подобны ($k \in 0 \div k_n$), то можно ожидать, что и у уравнения (3) структура стационарно-бегущих решений тоже будет нетривиальна. Понимание этого позволяет разобраться в поведении некоторых типичных сценариев эволюции решений уравнения (3).

В настоящей работе приведены результаты, полученные при одном значении параметра $B = 0{,}0287$. В этом случае нейтральное волновое число $k_n = 1{,}1$.

Для всех представленных ниже результатов рассматривалась эволюция периодического возмущения, у которого в начальный момент ненулевой задавалась только первая гармоника: $H_{1r} = 0{,}01, \quad H_{1i} = 0$. Целью проведенных расчетов было продемонстрировать как при фиксированном значении параметра B и одинаковых начальных данных по мере продвижения вглубь области линейной неустойчивости у уравнения (3) меняется решение.

Наиболее проста и понятна эволюция возмущений в той области волновых чисел, где существует только одно стационарно–бегущее семейство решений. В этом случае все начальные возмущения эволюционируют к соответствующему стационарно–бегущему решению. Пример такого развития возмущений показан на рис. 3. Здесь волновое число $k = 0{,}9$. На рис. 3 представлена зависимость модулей первых трех гармоник от времени.

Как видно из рис. 3, модули всех трех гармоник быстро выходят на стационарные значения, причем первая гармоника является преобладающей. Поэтому установившийся стационарно–бегущий режим представляет собой практически чистую синусоиду. Такое поведение гармоник обусловлено тем, что только первая из них лежит в области неустойчивости. Уже вторая гармоника расположена достаточно далеко от границы этой области, поэтому у нее и более высоких гармоник линейное затухание велико. Нелинейные эффекты, обусловленные квадратичной нелинейностью (второе слагаемое в уравнении (3)), приводят к тому, что в результате между гармониками устанавливается такой баланс, что модуль первой гармоники существенно больше, чем у всех остальных гармоник.

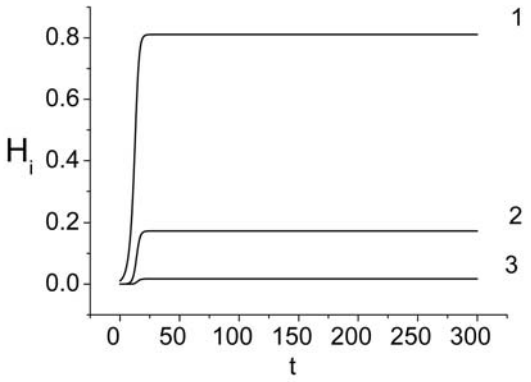

Рис.3 Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. $k = 0{,}9$.

На рис. 4 показан пример развития возмущения с волновым числом $k = 0{,}7$.

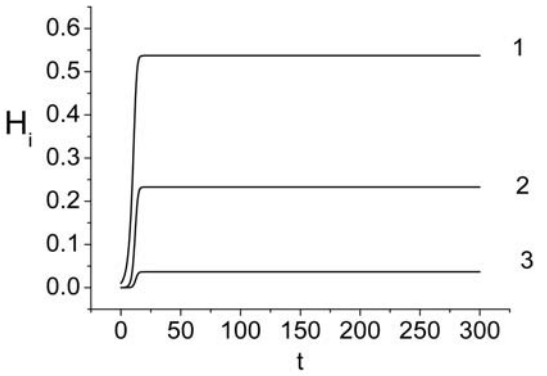

Рис.4 Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. $k = 0{,}7$

Здесь решение также притягивается к стационарно–бегущей волне, но, в отличие от первого примера, и вторая и третья гармоники соизмеримы с первой. В этом случае также только первая гармоника лежит в области неустойчивости, вторая же гармоника, хотя и лежит в области устойчивости, располагается к границе неустойчивости существенно ближе, чем в первом случае, и нелинейные эффекты,

при выходе на стационар, обеспечивает ее модулю достаточно большую величину. В свою очередь это приводит к тому, что и более высокие гармоники так же достигают больших установившихся значений.

Пример развития возмущения с волновым числом k=0,3 представлен на рис. 5, 6.

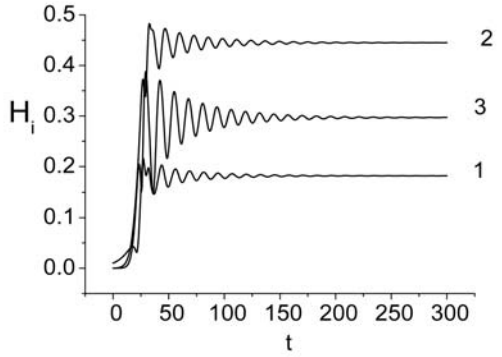

Рис.5 Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. $k = 0{,}3$.

Здесь решение также проэволюционировало к некоторому стационарно–бегущему решению, но этот пример существенно отличается от приведенных выше. В этом случае (рис. 5) на больших временах доминирует 2-я гармоника, поэтому на этих временах на длине волны наблюдается два основных экстремума (см. рис. 6). Здесь в моменты времени 50 (кривая 1), 150 (кривая 2), 300 (кривая 3) показаны профили волн. По оси абсцисс отложены две длины волны ¾ 2λ ($\lambda = 2\pi / k$) .

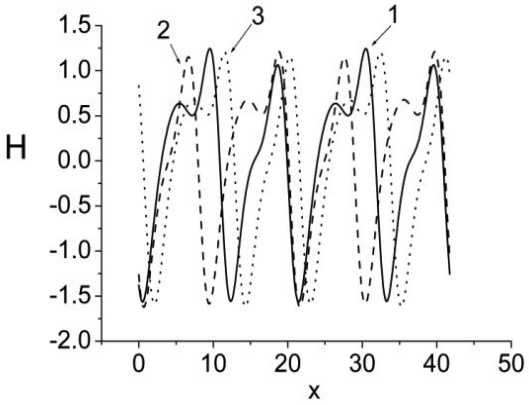

Рис.6 Профили поверхности для трех различных моментов времени. $k = 0{,}3$.

Представленными примерами не исчерпывается многообразие различных сценариев развития возмущений. Для того, чтобы выявить среди их основные, требуется провести существенно большее количество расчетов для нескольких различных значений параметра B , варьируя с достаточно мелким шагом как волновое число, рассматриваемых решений, так и начальные значения гармоник. Такую работу планируется провести позже.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведена новая система уравнений для моделирования динамики длинноволновых возмущений на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости, стекающего по вертикальной плоскости и обдуваемого турбулентным потоком газа. Проведен анализ линейной устойчивости невозмущенного течения. Обнаружено, что при умеренных числах Рейнольдса жидкости линейные модели Бенджамина и переноса граничных условий на невозмущенный уровень для возмущенного течения газа дают качественно похожие результаты. При уменьшении числа Рейнольдса, отличия между результатами, полученными по разным моделями турбулентности, становятся более выраженными.

В случае малых чисел Рейнольдса исследование слабонелинейных возмущений, сводится к рассмотрению одного эволюционного уравнения на отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Это уравнение в некотором смысле аналогично уравнению Курамото-Сивашинского, но, в отличие от последнего, содержит дополнительный член с интегральной накачкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеенко С.В., Архипов Д.Г., Цвелодуб О.Ю. Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Доклады РАН. 2011. Т. 436, № 1. С. 43-46.

Alekseenko, S.V., Arkhipov, D.G.,

Tsvelodub, O.Yu. Divergent system of equations for a fluid film flowing down a vertical wall // Dokl. Phys. – Vol 2011. – Vol 56 – P. 22–25.

2. Alekseenko S.V., Arkhipov D.G., Tsvelodub O.Yu. Modelling of the stresses produced by the turbulent gas flow over the wavy liquid film // Transport Phenomena with Moving Boundaries. 2007. Berlin. P. 51-62.
3. Alekseenko S. V., Aktershev S. P., Cherdantsev A. V., Kharlamov S. M., Markovich D. M. Primary instabilities of liquid film flow sheared by turbulent gas stream // International Journal of Multiphase Flow. 2009. Volume 35, pp. 617-627.
4. Aktershev S. P., Alekseenko S. V., Interfacial instabilities in an annular two-phase flow // Russian Journal of Engineering Thermophysics. 1996. Volume 6, No. 4, pp. 307-320.
5. Tseluiko D., Kalliadasis S. Nonlinear waves in counter-current gas–liquid film flow // Journal of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 673. P. 19-59.
6. Цвелодуб О.Ю. Моделирование волновых режимов на пленке вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19. N 2. С. 183–192.

Tsvelodub, O.Yu. Modeling of wave regimes on the film of viscous liquid falling down a vertical plate // Thermophysics and Aeromechanics. 2012. Vol. 19. – P. 91–99.

© Вожаков И.С., Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г.