УДК 536.24.01

# НАГРЕВ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ПОСТОЯННОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА СТЕНКЕ

**Актершев С.П., Барташевич М.В.**

*Институт теплофизики им.С.С.Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия*

Исследование выполнено в ИТ СО РАН
за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-29-00093)

**АННОТАЦИЯ**

Аналитическим и численным методами решается классическая задача о нагреве ламинарной пленки жидкости, стекающей по наклонной поверхности с заданным тепловым потоком на стенке. На поверхности пленки задан коэффициент теплообмена между жидкостью и газом. Для теплового начального участка, на котором нагрев жидкости происходит в тонком пристенном слое, а возмущение температуры не успевает прорасти до межфазной поверхности, получено аналитическое решение, зависящее от автомодельной переменной. Распределение температуры в конце теплового начального участка служит начальным профилем для последующего участка течения, на котором происходит теплообмен между жидкостью и газом и установление равновесного распределения температуры в жидкости. На основе метода Галеркина предложен полуаналитический подход к описанию теплопереноса в пленке, в котором отклонение температуры жидкости от равновесного распределения представлено в виде ряда по базисным функциям, удовлетворяющим граничным условиям на стенке и на межфазной поверхности. Сопоставление расчетов по предложенному методу с численным решением конечноразностным методом показало, что результаты хорошо согласуются при использовании 8–10 базисных функций. Результаты расчетов по предложенному полуаналитическому методу хорошо согласуются экспериментальными данными при различных значениях теплового потока и числа Рейнольдса. Преимущество полуаналитического подхода к описанию теплопереноса в пленке жидкости заключается в эффективности вычислительного алгоритма, позволяющего детально описать поле температуры в неизотермической пленке при минимальных вычислительных затратах. Предложенный подход дает теоретическую оценку расстояния, на котором в жидкости устанавливается равновесное распределение температуры, а также легко обобщается на случай произвольного профиля скорости в пленке, в частности, на случай турбулентной пленки.

## ВВЕДЕНИЕ

Неизотермическое течение тонкой пленки жидкости по твердой поверхности реализуется в различных аппаратах энергетики и химической технологии (испарителях, конденсаторах, абсорберах, теплообменниках, в оросительных градирнях, ректификационных колоннах) для интенсификации процессов тепломассообмена. Широкое применение пленочных течений объясняет их многочисленные теоретические [1-7] и экспериментальные [8,9] исследования.

Классическая задача о нагреве стекающей пленки впервые рассмотрена в монографии [1] для случая заданной температуры стенки. Для теплового начального участка, на котором жидкость нагревается только в тонком слое вблизи стенки, получено аналитическое решение в виде функции от автомодельной переменной. Это решение позволяет рассчитать тепловой поток на стенке и является основной для многих прикладных исследований. В работе [2] проведено теоретическое описание процессов совместного тепломассопереноса при абсорбции пара в ламинарной стекающей пленке жидкости. Проведен теоретический анализ для начального участка, на котором тепловой слой вблизи изотермической стенки и диффузионный слой вблизи поверхности пленки еще не сомкнулись. Профиль скорости в тепловом слое предполагался линейным, а диффузионном слое – однородным. В этом случае были получены автомодельные решения для температуры и концентрации. Взаимосвязь между процессами переноса энергии и массы существенно усложняет проблему, поэтому в последующих теоретических исследованиях [3-5] процессы тепло и массопереноса при абсорбции газа пленкой жидкости также рассматривались при различных упрощающих предположениях. В [3] рас-

смотрен случай изотермической стенки и изотермической поверхности пленки с параболическим профилем скорости в пленке. Построено полуаналитическое решение, начиная от входного сечения до установления равновесного распределения температуры жидкости. В работе [4] проблема абсорбции газа ламинарной стекающей пленкой жидкости рассмотрена аналитическим методом. Тепловой поток на поверхности пленки, обусловленный абсорбцией, считался заданным; на стенке задавалось условие теплоизоляции. Такая упрощенная постановка допускает аналитическое решение для профилей температуры и концентрации. В [5] выбирался усредненный профиль скорости. Из-за сделанных существенных упрощений, эти результаты имеют довольно ограниченную область применения. Другим осложняющим фактором в проблеме неизотермического течения пленки жидкости является наличие волн на поверхности пленки. Вследствие сложности теоретического описания нелинейных волн их влияние на теплоперенос в пленке исследовалось численными методами [6,7]. Еще одним фактором, усложняющим эту проблему, является термокапиллярное напряжение на поверхности нагреваемой пленки. В экспериментах [8] было показано, что длина начального теплового участка для гладкой пленки уменьшается с ростом плотности теплового потока за счет влияния термокапиллярных сил, направленных против основного течения. Информация о длине начального термического участка важна для расчета теплообмена к стекающим пленкам жидкости и совершенствования промышленных аппаратов.

В данной работе рассмотрена классическая задача о нагреве ламинарной пленки жидкости, стекающей по наклонной поверхности с заданным тепловым потоком на стенке.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерное стационарное течение ламинарной пленки жидкости постоянной толщины $h$ на обогреваемой пластине, наклоненной под углом $\theta$ к горизонту. На пластине задан тепловой поток $q_W$. Поверхность жидкости контактирует с неподвижным газом, температура которого равна $T_g$. На межфазной поверхности задан коэффициент теплообмена $\alpha$ между жидкостью и газом. Плотность $\rho$, динамическую вязкость $\mu$, теплопроводность $\lambda$, температуропроводность а жидкости считаем постоянными. Введем декартову систему координат с осью $Ox$ в направлении течения и осью $Oy$ по нормали к пластине (см. рис. 1). Профиль скорости в пленке имеет вид

$$u = \left(g \sin\theta / 2\nu\right)\left(2yh - y^2\right)$$

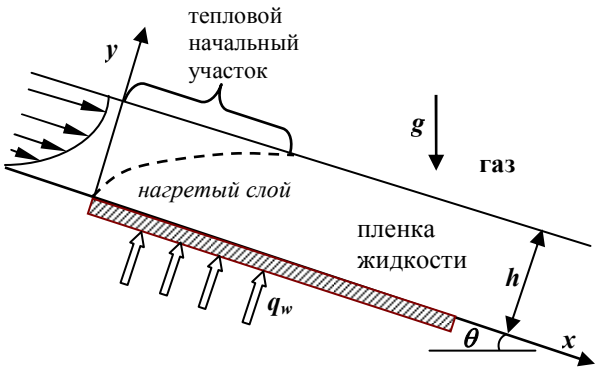


Рис. 1. Схема течения нагреваемой пленки

Изменение температуры жидкости описывается уравнением энергии, которое в погранслойном приближении $\partial^2/\partial x^2 << \partial^2/\partial y^2$ имеет вид:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (1)$$

На поверхности пленки теплообмен с газом описывается условием

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=h} = -\alpha\left(T\Big|_{y=h} - T_g\right)$$

Выберем $l = 3h\,Re\,Pr/2$ масштабом по оси $Ox$, где $Re = gh^3 \sin\theta / 3\nu^2$ – число Рейнольдса пленки, $\nu$ – кинематическая вязкость, $Pr = \nu / a$ – число Прандтля. В качестве масштаба температуры возьмем $T_m = q_W h / \lambda$. Перейдем к безразмерным переменным $x / l$, $y / h$, $\left(T - T_g\right)/T_m$, сохраняя прежние буквенные обозначения. В безразмерных переменных уравнение (1) примет вид

$$\left(2y - y^2\right)\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (2)$$

Граничные условие для температуры на стенке и на поверхности пленки примут вид

$$\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = -1, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} + Bi \cdot T\right)\Big|_{y=1} = 0. \qquad (3)$$

Здесь $Bi = \alpha h / \lambda$ – число Био. Для корректности постановки задачи уравнение (2) следует дополнить заданным профилем температуры жидкости на входе:

$$T\Big|_{x=0} = F(y). \qquad (4)$$

## ТЕПЛОВОЙ НАЧАЛЬНЫЙ УЧАСТОК

На малых расстояниях от края нагревателя нагрев жидкости происходит в тонком слое вблизи стенки, поэтому уравнение (2) можно записать в виде

$$2y\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \qquad (5)$$

Поскольку толщина нагретого слоя много меньше толщины пленки, теплообмен с газом не влияет на распределение температуры в пленке. В этом случае граничное условие на межфазной поверхности следует заменить на $T\big|_{y\to\infty}=0$.

В работе [1] получено аналитическое решение уравнения (5) для термического начального участка в условиях заданной температуры стенки. Это решение представлено в виде функции от автомодельной переменной $\xi=y/x^{1/3}$. В рассматриваемом нами случае заданного теплового потока уравнение (5) с граничными условиями $dT/dy\big|_{y=0}=-1$, $T\big|_{y\to\infty}=0$ также имеет аналитическое решение в виде

$$T=x^{1/3}\Phi(\xi),\ \text{где}\ \xi=y/x^{1/3}.$$

Подставляя это в (5), получаем.

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}+\frac{2}{3}\xi^2\frac{d\Phi}{d\xi}-\frac{2}{3}\xi\Phi=0$$

Это уравнение имеет общее решение:

$$\Phi(\xi)=C_1\xi+C_2\left(\exp\left(-\frac{2\xi^3}{9}\right)+\frac{2}{3}\xi\int_0^{\xi}z\cdot\exp\left(-\frac{2z^3}{9}\right)dz\right)$$

Константы $C_1$ и $C_2$ определяются из граничных условий $d\Phi/d\xi\big|_{\xi=0}=-1$, $\Phi\big|_{\xi\to\infty}=0$. В результате получаем

$$\Phi(\xi)=-\xi(1-G(\xi))+\\+\frac{3}{2}\exp\left(-\frac{2\xi^3}{9}\right)\Big/\int_0^{\infty}z\exp\left(-\frac{2z^3}{9}\right)dz\cdot \qquad (6)$$

Здесь $G(\xi)=\int_0^{\xi}z\exp\left(-\frac{2z^3}{9}\right)dz\Big/\int_0^{\infty}z\exp\left(-\frac{2z^3}{9}\right)dz$.

На рис. 2 показан профиль (6). Из рисунка видно, что некоторое значение $\xi_0$ = 3.25, при котором температура близка к нулю, можно принять за условную толщину нагретого слоя. Таким образом, протяженность начального участка (т.е. расстояние $x_0$, на котором возмущение температуры «прорастает» на всю толщину пленки), определяется из соотношения $x_0=1/\xi_0^3\approx 0{,}029$. В конце теплового начального участка, где нагретый слой выходит на межфазную поверхность, распределение температуры в пленке определяется соотношением

$$F(y)=x_0^{1/3}\Phi\left(y/x_0^{1/3}\right)=\frac{\Phi(3{,}25y)}{3{,}25}. \qquad (7)$$

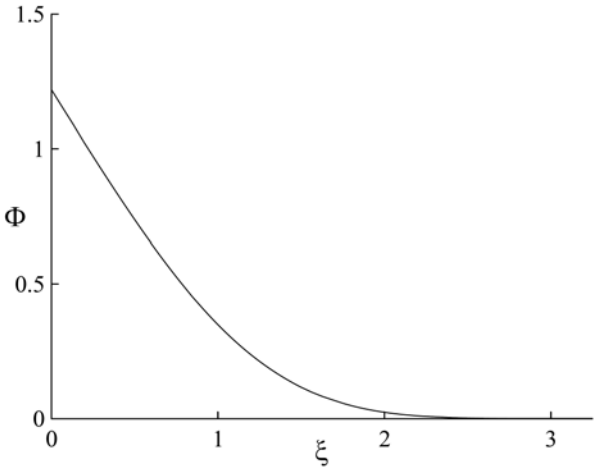


Рис. 2. Функция Ф($\xi$) для температуры жидкости на тепловом начальном участке

Поскольку $x_0<<1$, длиной теплового начального участка можно пренебречь по сравнению с протяженностью участка, на котором происходит установление равновесной температуры жидкости. Таким образом, (7) задает профиль температуры в пленке на входе этого участка

## НАГРЕВ ПЛЕНКИ ПОСЛЕ ТЕПЛОВОГО НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА

При $x>x_0$ возмущение температуры «прорастает» на всю толщину пленки и теплообмен с газом оказывает влияние на профиль температуры в пленке. Вдали от края нагревателя в пленке устанавливается тепловое равновесие, когда температура жидкости не зависит от координаты *x*. При этом весь тепловой поток от стенки передается через жидкую пленку в газ. Равновесный профиль температуры, удовлетворяющий уравнению (2) с граничными условиями (3), имеет вид

$$T_{steady}=1+\frac{1}{Bi}-y \qquad (8)$$

Будем решать задачу (2)-(4) методом Галеркина, который является одним из вариантов метода взве-

шенных невязок [10]. Ищем решение уравнения (2) в виде

$$T(x,y) = T_{steady} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\psi_k(y). \qquad (9)$$

Здесь ряд описывает процесс установления равновесной температуры. Пробные функции $\psi_k(y)$ должны удовлетворять соответствующим граничным условиям на стенке и на поверхности пленки:

$$\psi'(0) = 0,\ \psi'(1) + Bi\,\psi(1) = 0. \qquad (10)$$

Выберем пробные функции в виде $\psi_k = \cos\omega_k y$. Из (10) следует, что все частоты $\omega_k$ являются корнями трансцендентного уравнения

$$\omega \cdot \sin\omega = Bi \cdot \cos\omega$$

и легко вычисляются методом итераций. Нетрудно показать, что система функций $\psi_k(y)$ представляет собой ортогональный базис (т.е. $\int_0^1 \psi_k\psi_m dy = 0$ при $k \neq m$), причем любую функцию переменной $y$ на интервале $0 \le y \le 1$ можно представить в виде разложения в ряд по $\psi_k(y)$. Хотя все члены ряда в (9) удовлетворяют условиям на стенке и на поверхности пленки, но не удовлетворяют уравнению энергии (2). Подставляя (9) в (2), получаем невязку в виде суммы ряда:

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(x,y),$$

где $R_k(x,y) \equiv \left((2y - y^2)\frac{da_k}{dx} + \omega_k^2 a_k\right)\psi_k$.

Согласно методу Галеркина, потребуем, чтобы проекция компоненты невязки $R_k(x,y)$ на соответствующую базисную функцию $\psi_k(y)$ была равна нулю. Отсюда получаем уравнение для $a_k(x)$:

$$\frac{da_k}{dx}\int_0^1 (2y - y^2)\psi_k^2 dy + \omega_k^2 a_k \int_0^1 \psi_k^2 dy = 0.$$

Это уравнение имеет решение

$$a_k(x) = A_k \exp(-\beta_k x),$$

где $\beta_k = \omega_k^2 \int_0^1 \psi_k^2 dy \Big/ \int_0^1 (2y - y^2)\psi_k^2 dy > 0$. (11)

Таким образом, поле температуры жидкости в пленке имеет вид

$$T(x,y) = 1 + \frac{1}{Bi} - y - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\beta_k x)\cos\omega_k y. \qquad (12)$$

Значения констант $A_k$ определяются из профиля температуры (7) на входе. Подставляя (9) в условие (4), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\psi_k = T_{steady}(y) - F(y).$$

Таким образом, $A_k$ есть коэффициент разложения функции $T_{steady}$–$F$ в ряд по базисным функциям $\psi_k(y)$ и определяется формулой

$$A_k = \int_0^1 (T_{steady}(y) - F(y))\psi_k dy \Big/ \int_0^1 \psi_k^2 dy. \qquad (13)$$

Предложенный полуаналитический подход позволяет легко оценить расстояние, на котором в пленке устанавливается равновесная температура (8). Самая «медленно затухающая» экспонента в (12) соответствует $k$ = 1, поэтому характерное расстояние, на котором устанавливается равновесная температура, равно

$$l_{eq} \approx 1/\beta_1 = \int_0^1 (2y - y^2)\cos^2\omega_1 y dy \Big/ \omega_1^2 \int_0^1 \cos^2\omega_1 y dy$$

В случае $Bi << 1$ для частоты $\omega_1$ имеем $\omega_1 \approx \sqrt{Bi} << 1$, отсюда $l_{eq} \approx 2/3Bi$. Размерная протяженность участка установления равновесной температуры равна $l_{eq} = \lambda\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}/\alpha$ и уменьшается с ростом коэффициента теплообмена между жидкостью и газом.

## ТЕПЛООТДАЧА К ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

Перенос тепла от стенки к пленке жидкости описывается коэффициентом теплоотдачи $\alpha_w$, определяемый соотношением $q_w = \alpha_w(T_w - T_f)$.

Здесь $T_w$ – размерная температура стенки, $T_f = \int_0^1 uTdy \Big/ \int_0^1 udy$ – размерная среднемассовая температура жидкости.

Используя толщину пленки $h$ в качестве масштаба длины, коэффициент теплопереноса можно выразить в терминах безразмерного числа Нуссельта $Nu = \alpha_w h/\lambda$.

Переходя к безразмерной температуре, имеем

$$Nu = \frac{1}{T_w - T_f}.$$

Из (12), находим выражения для безразмерных температур

$$T_w = 1 + \frac{1}{Bi} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\lambda_k x),$$

$$T_f = 1 + \frac{1}{Bi} - \frac{5}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_k \exp(-\lambda_k x).$$

Здесь

$$J_k = \frac{3}{2}\int_0^1 u \cos\omega_k y dy = \frac{3\sin\omega_k}{2\omega_k} + \frac{3}{\omega_k^2}\left(\frac{\sin\omega_k}{\omega_k} - 1\right).$$

Отсюда находим

$$T_w - T_f = \frac{5}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\lambda_k x)(1 - J_k). \quad (14)$$

Из (14) следует, что при $x \to \infty$ установившееся значение числа Нуссельта равно $Nu_\infty = 8/5$ и не зависит от числа Био.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В расчетах методом Галеркина использовались 10-15 базисных функций. Результаты расчетов сравнивались с результатами численного решения уравнения (2) конечноразностным методом. На рис. 3 показано влияние числа Био. Кривыми 1-3 представлены зависимости температуры поверхности пленки от расстояния для различных значений *Bi*. Из рисунка видно, что температура поверхности пленки монотонно растет и на некотором расстоянии достигает равновесного значения 1/*Bi*. Расстояние, на котором в пленке устанавливается стационарное распределение температуры, уменьшается с ростом *Bi*. Из рис. 3 также видно, что результаты расчетов хорошо согласуются с численным решением уравнения энергии конечноразностным методом.

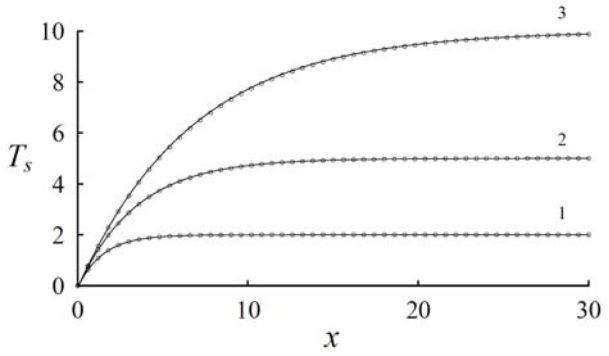


Рис. 3. Температура поверхности пленки в зависимости от расстояния для различных значений *Bi*: 1 – *Bi* = 0,5; 2 – *Bi* = 0,2; 3 – *Bi* =0,1; сплошные линии – конечно-разностный метод, кружки – метод Галеркина.

На рис. 4 показано число Нуссельта в зависимости от расстояния для различных значений *Bi*. Из рисунка видно, что при $x << 1$ значение *Nu* быстро падает, а при $x > 1$ падение происходит гораздо медленней. Это объясняется тем, что экспоненты, соответствующие высоким частотам в ряде (12), быстро затухают, и остается только наиболее «медленно затухающая» экспонента, соответствующая $k = 1$.

На рис. 5, 6 приведены результаты расчетов предложенным методом в сравнении с экспериментальными данными [9] для пленки воды при различных значений числа Рейнольдса.

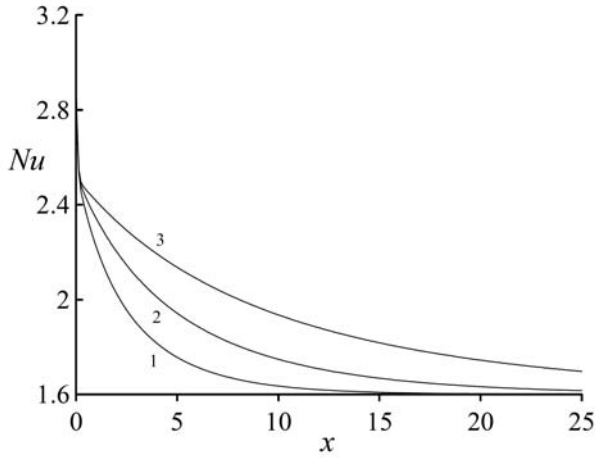


Рис. 4. Число Нуссельта в зависимости от расстояния для различных значений *Bi*: 1 – *Bi* = 0,1, 2 – *Bi* = 0,2, 3 – *Bi* =0, 05

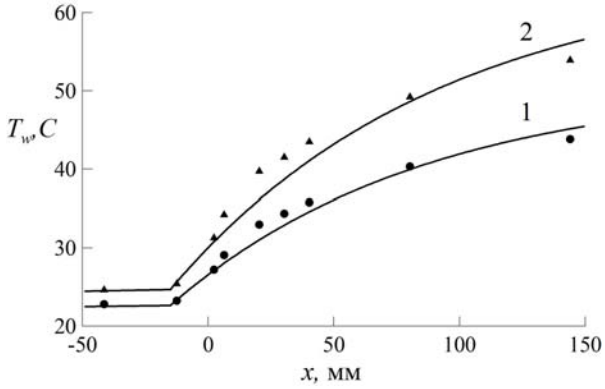


Рис. 5. Температура стенки в зависимости от расстояния при Re =4,9 для различных значений теплового потока (Вт/м$^2$): 1 – $q_w$ = 3334, *Bi* = 0,015, 2 – $q_w$ = 4298, *Bi* = 0,013. Сплошные линии – расчет, кружки и треугольники – эксперимент [9].

Кривыми 1, 2 показана температура стенки в зависимости от расстояния до края нагревателя, рассчитанная для условий экспериментов при различных значениях теплового потока $q_w$. Свойства жидкости взяты при средней температуре нагревателя. В экспериментах [9] вертикальная пленка жидкости стекала по текстолитовой плите, в которую был заделан пря-

моугольный металлический нагреватель длиной 150 мм. Температура поверхности нагревателя и текстолитовой плиты, измеренная в различных точках с помощью термопар, показана на рис. 6 кружками и треугольниками.

В экспериментальных условиях нагрев пленки с начальной температурой, равной температуре окружающего воздуха, начинался несколько выше нагревателя из-за нагрева текстолитовой плиты вблизи верхнего края нагревателя. Для того, чтобы учесть этот эффект, расчетные кривые на рис. 5 смещены вверх по течению на 15 мм, а на рис. 6 смещение кривых составляет 10 мм. В расчетах число Био подбиралось из наилучшего согласования с экспериментальными данными. Расчетные значения *Bi* на рис. 5, 6 соответствуют коэффициенту теплообмена между жидкостью и газом в диапазоне 107–130 Вт/ К м$^2$. Из рисунков видно, что расчетные зависимости хорошо согласуются экспериментальными данными при различных значениях теплового потока и числа Рейнольдса.

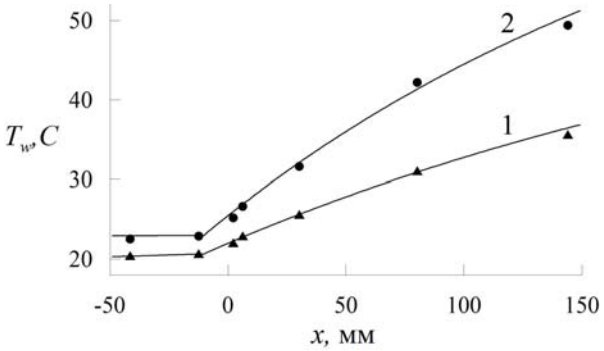


Рис. 6. Температура стенки в зависимости от расстояния при Re = 10,4 для различных значений теплового потока (Вт/м$^2$): 1 – $q_w$ = 4580, *Bi* = 0,025, 2 – $q_w$ = 7409, *Bi* = 0,025. Сплошные линии – расчет, кружки и треугольники – эксперимент [9].

## ВЫВОДЫ

Исследована задача о нагреве ламинарной стекающей пленки жидкости в условиях постоянного теплового потока на стенке. Для термически начального участка получено аналитическое решение. На основе метода Галеркина предложен полуаналитический подход к определению поля температуры жидкости в пленке. Предложенный метод позволяет легко оценить расстояние, на котором в жидкости устанавливается равновесное распределение температуры. Сопоставление расчетов по предложенному методу с численным решением конечноразностным методом показало, что результаты хорошо согласуются при использовании 8–10 базисных функций. Отметим, что предложенный подход легко обобщается на случай произвольного (заранее заданного) профиля скорости в пленке, в том числе на случай турбулентной пленки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bird R.B., Stewart W.E., and Lightfoot E.N. Transport Phenomena, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2nd edition, 2002.
2. Nakoryakov V.E., Grigorjeva N.I. Calculation of heat and mass transfer in nonisothermal absorption on the initial portion of downflowing films // Theor. Found. Chem. Eng. 1980. – V. 14 (4). P. 305–309.
3. Aubert A., Candelier F., Solliec C. Semi-analytical solution for heat transfer in a water film flowing over a heated plane // Journal of Heat Transfer 2010. – V. 132, 064501.
4. Hidouri N., Chermiti I., Ben Brahim A. Second Law Analysis of a Gas-Liquid Absorption Film. Journal of Thermodynamics 2013. – V. 2013, ID 909162A.
5. Mittermaier M., Schulze P., Ziegler F. A numerical model for combined heat and mass transfer in a laminar liquid falling film with simplified hydrodynamics // Int. J. Heat Mass Transfer 2014. – V. 70, P. 990–1002.
6. Актершев С.П. Теплоперенос в ламинарно-волновой пленке жидкости. // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. – 2011. – № 2 (7).–С. 42-46.

   Aktershev S.P. Heat transfer in laminar- wavy liquid film // Modern science: collection of research papers, 2011. – № 2 (7). P. 42-46.
7. Aktershev S.P. Heat transfer in locally heated liquid films moving under the action of gravity and gasflow // J. of Eng. Thermophys. 2009. – V. 18, No 2, P. 138-150.
8. Chinnov E.A., Abdurakipov S.S. Thermal entry length in falling liquid films at high Reynolds numbers // Int. J. Heat Mass Transfer 2013. – V. 56, P. 775–786.
9. Chinnov E.A., Kabov O.A. The effect of three-dimensional deformations on local heat transfer to a nonuniformly heated falling film of liquid // High Temperature 2004. – V. 42, No 2, P. 267–277.
10. Fletcher C.A.J. Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 1 and 2. Springer–Verlag, 1987.

© Актершев С.П., Барташевич М.В. 