УДК 532.592:532.516

УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПОТОКА ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Архипов Д.Г., Хабахпашев Г.А., Цвелодуб О.Ю.

Новосибирский государственный университет
Институт теплофизики им.С.С.Кутателадзе СО РАН
Новосибирск, Россия

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-22-00174)

АННОТАЦИЯ

Одной из простейших моделей двухслойных потоков является стационарное ламинарное течение в плоском канале, когда вязкие жидкости различной плотности полагаются несжимаемыми и несмешивающимися. Для такого течения проведено исследование устойчивости линейных гравитационных волн на границе раздела. Значения фазовой скорости этих возмущений и профили вертикальной скорости, полученные аналитически в предельном случае, сопоставлены с результатами численного решения уравнений Орра–Зоммерфельда. Показано, что даже без учета вязких напряжений в данной задаче может возникнуть неустойчивость. Выяснено, что такая неустойчивость появляется из-за образования критического слоя подобно неустойчивости Майлса. Раскрыта взаимосвязь исследуемой неустойчивости с «межфазной» модой, изученной в работах (Yih, 1967) и (Yiantsios & Higgins, 1988). Продемонстрировано наличие этой неустойчивости не только при малых, но и при больших значениях числа Архимеда.

ВВЕДЕНИЕ

Двухслойные течения встречаются в химико-технологических процессах, ядерной и нефтегазовой индустрии и т.д. Для практических целей информация об устойчивости течения имеет принципиальное значение.

Задача исследования линейной устойчивости гидродинамических течений сформулирована более ста лет назад Кельвином, Рэлеем, Орром, Зоммерфельдом и Рейнольдсом. В частности, устойчивость плоского однофазного течения Пуазейля изучена достаточно полно (см., например, [1]). Развитие новых технологий облегчения транспорта нефти по трубопроводам с использованием расслоенных течений привлекли внимание исследователей к системам жидкость–жидкость (см. [2]).

К настоящему времени имеется большое число работ, изучающих устойчивость сдвигового потока двух слоев в плоском канале (см. схему на Рис. 1). Наиболее обстоятельный обзор литературы, отражающий состояние проблемы, приведен в книге [2]. Основным результатом, полученным в статье [3], является обнаружение так называемой «межфазной» моды (помимо обычных сдвиговых возмущений), которая даже в случае равенства плотностей может быть наиболее опасной вследствие скачка вязкости. Эксперименты [4] показали, что в реальных условиях, когда плотности жидкостей существенно различаются, сдвиговые моды оказываются более опасными (становятся неустойчивыми при меньших числах Рейнольдса), чем «межфазная» для всех исследованных ими режимов. Это послужило отправной точкой для серии работ Yiantsios & Higgins по определению глобального спектра данной задачи с учетом всех физических факторов (например, [5]).

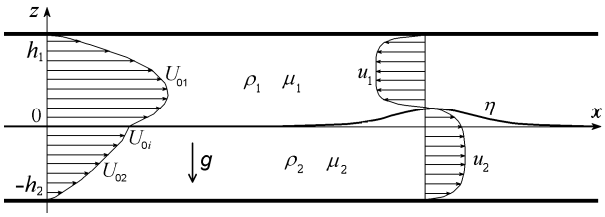

Рис. 1 Профили скоростей стационарного потока и возмущенного течения, вызванного распространением волны.

Авторы детально изучили систему, построили кривые нейтральной устойчивости и сформулировали качественные закономерности их положения и формы для широкого диапазона параметров задачи. В частности, были обозначены области, в которых единственная неустойчивая мода возникает из-за на-

личия поверхности раздела. Однако возмущения, соответствующие внутренним гравитационным волнам (в пределе, когда вязкость мала и стационарный поток отсутствует) в этих исследованиях не рассматривались.

Между тем, в последнее время заметно возрастает интерес к проблемам взаимодействия внутренних волн и сдвиговых течений. Среди работ, посвященных изучению длинных волн на границе раздела стационарного сдвигового течения двухслойной вязкой жидкости отметим статьи [7] и [8], где было показано, что, в частности, двухслойное течение Пуазейля является устойчивым в широком диапазоне параметров.

В двухслойном течении Пуазейля с небольшой разницей в плотностях жидкостей гравитационные волны распространяются с достаточно низкой фазовой скоростью, сопоставимой со скоростями стационарных ламинарных потоков. В данном случае вопрос о характере взаимодействия течения с гравитационной волной по-прежнему остается открытым. Некоторые аспекты данной проблемы были изучены в работе [9]. Авторами было предложено слабонелинейное эволюционное уравнение для моделирования гравитационных волн в системе с двухслойным потоком. Однако это уравнение было выведено в предположении малых скоростей течения. В этом случае анализ такого уравнения показывает, что гравитационная волна диссипирует при всех параметрах системы. Крайне актуальной задачей является получение подобного уравнения для более высоких скоростей потока, что позволит ответить на вопрос: происходит ли перекачка энергии от течения к волне. Для линейного анализа это эквивалентно обнаружению неустойчивости гравитационных волн при достижении определенного значения скорости стационарного потока.

Основным инструментом линейного анализа устойчивости течений является численное решение задачи Орра–Зоммерфельда. В асимптотическом случае исчезающей вязкости коэффициент при старшей производной стремится к нулю, и уравнение становится «жестким». Существует несколько методов решения таких уравнений: метод дифференциальной прогонки, детерминантный метод, разнообразные вариации метода Галеркина, когда решение проектируется на базис пробных функций, и другие.

Целью данной работы является более детальное исследование линейной устойчивости ламинарного течения двух жидкостей и, в частности, возмущений, соответствующих гравитационным волнам на границе раздела идеальных жидкостей в отсутствие стационарного потока.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение двух слоев жидкости в плоском горизонтальном канале с неподвижными жесткими дном и крышкой. Жидкости различаются по плотности, вязкости и глубине. Предполагается, что жидкости несжимаемые и несмешивающиеся. Движение происходит под действием постоянного продольного градиента давления.

В случае стационарного ламинарного потока вертикальные компоненты скоростей в слоях равны нулю, а профиль горизонтальных скоростей жидкости получается путем сшивки двух параболических профилей:

$$U_{0l} = U_{0i}\left(\alpha_l + \frac{1}{2} + \frac{\varsigma}{2} - \alpha_l \varsigma^2\right),$$

$$\alpha_1 = \frac{h(h+\mu)}{4\mu(1+h)},\ \alpha_2 = \frac{h+\mu}{4h(1+h)}.$$

Здесь U_{0i} – безразмерная горизонтальная стационарная скорость на границе раздела, $\rho=\rho_1/\rho_2$, $h=h_1/h_2$, $\mu=\mu_1/\mu_2$, где h_l, μ_l, ρ_l – толщины, динамические вязкости и плотности жидкостей, соответственно. Здесь и далее все величины, относящиеся к верхнему слою, обозначены индексом 1, а все величины, относящиеся к нижнему слою, индексом 2. Новая вертикальная координата $\zeta_l = 1 + (-1)^l 2z/h_l$ определялась так, чтобы на крышке и дне она соответствовала значению $\zeta_l=-1$, а на границе раздела – значению $\zeta_l=1$.

Добавим линейные возмущения к параметрам потока (скорость, давление и отклонения границы раздела от невозмущенного уровня) и получим классическое уравнение Орра–Зоммерфельда для комплексной амплитуды вертикальной компоненты скорости жидкости w_l в l-ом слое

$$16w_l'''' - 8k_l^2 w_l'' + k_l^4 w_l =$$

$$= ik_l \mathrm{Ar}_l\left[(U_{0l}-c)\left(4w_l'' - k_l^2 w_l\right) - 4w_l U_{0l}''\right]$$

со следующими граничными условиями:

$$\varsigma = -1 \ \Rightarrow\ w_l = w_l' = 0;$$

$$\varsigma = 1 \ \Rightarrow\ w_l = c - U_{0i},$$

$$-U_{01}' + hU_{02}' = w_1' + hw_2',$$

$$4\mu w_1'' = 4h^2 w_2'' + k_1^2 w_i(1-\mu),$$

$$\frac{\rho}{h}\left[2(c-U_{0i})w_1' + 2w_{l1}U_{01}' - \frac{2i}{k_1\mathrm{Ar}_1}\left(4w_1''' - 3k_1^2 w_1'\right) - 1\right] =$$

$$= 1 - \left[2(c-U_{0i})w_2' + 2w_2 U_{02}' - \frac{2i}{k_2\mathrm{Ar}_2}\left(4w_2''' - 3k_2^2 w_2'\right)\right],$$

Здесь c – фазовая скорость, обезразмеренная по c_0, где

$c_0^2 = gh_1h_2(\rho_2-\rho_1)/(\rho_1h_2+\rho_2h_1)$;

$k_1 = k_d h/(h+1)$,

$k_2 = k_d/(h+1)$,

$k_d = k(h_1+h_2)$ – безразмерные волновые числа,

k – размерное волновое число;

$\mathrm{Ar}_l = c_0 h_l \rho_l/\mu_1$, – число Архимеда для l-го слоя.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Решение уравнений Орра–Зоммерфельда

В этой работе использован псевдоспектральный метод с базисными функциями в виде полиномов Чебышева:

$$T_i(\varsigma) = 1, \quad \varsigma, \quad 2\varsigma^2 - 1, \quad \ldots$$
$$w_l(\varsigma) = \sum_i C_{l,i}\, T_i(\varsigma).$$

Подстановка расчетных точек $\zeta_k = \cos(\pi k/N)$, где $k = 0, \ldots, N$ в это выражение, а затем в уравнения Орра–Зоммерфельда приводит к обобщенной задаче на собственные значения $\mathbf{A}x = \lambda \mathbf{B}x$, численно решаемой с помощью GSL (GNU scientific library).

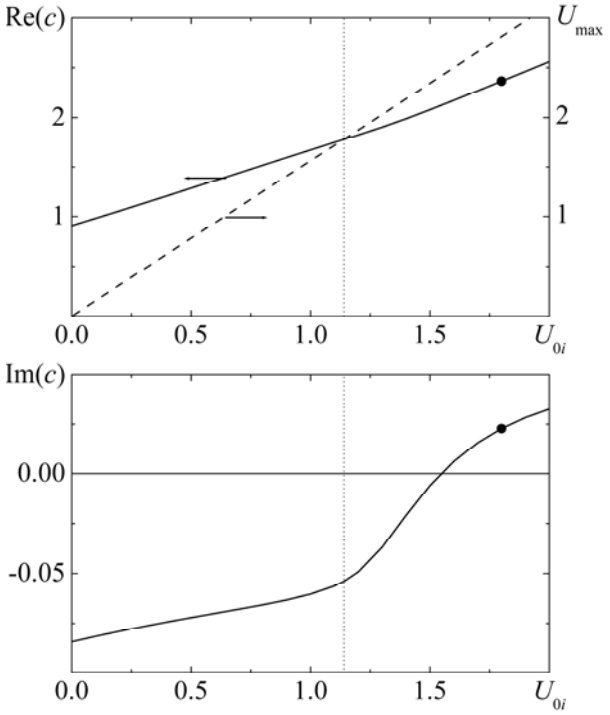

Рис. 2 Зависимости действительной (**Re**) и мнимой (**Im**) части фазовой скорости c (сплошные кривые) и максимального значения скорости стационарного течения $U_{\max}$ (штриховая линия) от скорости U_{0i} (область существования критического слоя расположена справа от вертикальной пунктирной прямой).

Согласно результатам, полученным в [10] даже в однородной жидкости гравитационные волны теряют устойчивость при появлении критического слоя (максимум скорости невозмущенного течения больше фазовой скорости). В статье [9] показано, что при достаточно больших числах Архимеда в двухслойном течении может появляться критический слой. Авторы настоящей работы обнаружили режим, который при высоких числах Архимеда ($\mathrm{Ar}_1 = 1000$) соответствует внутренней гравитационной волне в жидкости ($h = 4$, $\mu = 1$, $\rho = 0.98$, $k_d = 1$). Зависимость фазовой скорости c данного режима от безразмерной скорости потока U_{0i} показана на рис. 2. В точке, где максимальное значение скорости стационарного течения превышает фазовую скорость ($U_{0i} = 1.14$), в верхней жидкости образуется критический слой. Из рисунка видно, что дальнейшее увеличение скорости потока приводит к резкому росту мнимой части фазовой скорости и возникновению неустойчивости при $U_{0i} > 1.56$.

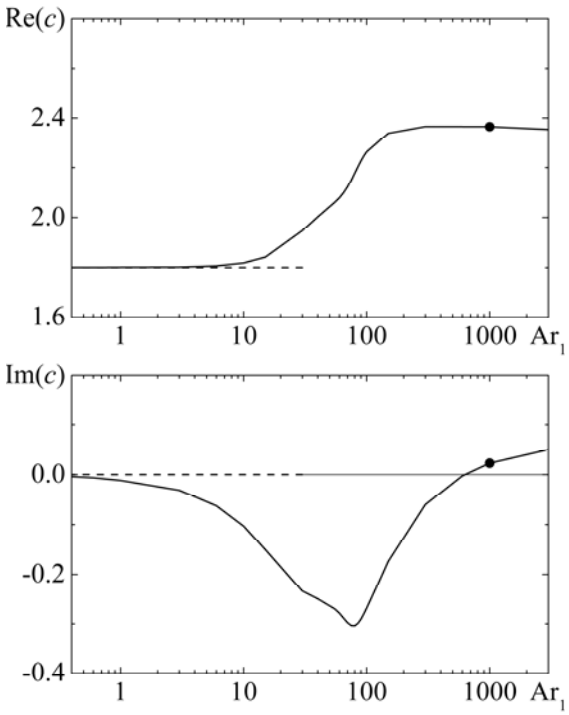

Рис. 3 Зависимости действительной (**Re**) и мнимой (**Im**) части фазовой скорости c (сплошные линии) от значения числа Архимеда Ar_1 (штриховые прямые соответствуют асимптотическому анализу [3]).

Теперь, если выбрать скорость потока U_{0i}=1.8 (точки на рис. 2 и 3) и постепенно снижать значение числа Архимеда, то, вначале возмущение становится

устойчивым, при $\mathrm{Ar}_1 \approx 80$ значение мнимой части фазовой скорости достигает минимума, а затем начинает расти, асимптотически приближаясь к нулю, при этом $\mathrm{Re}(c) \to U_{0i}$ (см. рис. 3). В статье [5], режим с такой фазовой скоростью считался нейтрально устойчивым в пределе малых чисел Рейнольдса, а параметр, определяющий влияние силы тяжести, равнялся нулю. Увеличение силы тяжести оказывало стабилизирующее влияние на «межфазную» моду (подобно тому, как на рис. 3 до $\mathrm{Ar}_1 \approx 80$). Однако, в отличие от работы [5], при более высоких числах Архимеда характер изменения мнимой части фазовой скорости принципиально меняется.

Таким образом, «межфазная» мода, найденная Yih, переходит в гравитационную волну при увеличении числа Архимеда. При высоких числах Архимеда механизм неустойчивости является следствием не стратификации по вязкости, а возникновения критического слоя.

Аналитическое решение уравнений Рэлея

В случае очень длинных ($k_d \to 0$) возмущений и очень малой диссипации ($\mathrm{Ar}_l \to \infty$) мы можем использовать обычные уравнения Эйлера. Тогда уравнения Орра–Зоммерфельда для каждом слоя сводятся к следующим уравнениям Рэлея:

$$(c - U_{0l})w_l'' + w_l U_{0l}'' = 0 .$$

Интегрируя данные уравнения получим

$$(c - U_{0l})w_l' + w_l U_{0l}' = a_l .$$

Решения этих уравнений можно представить в виде

$$w_l = (c - U_{0l})\left[\frac{a_l}{D_l}\left(\frac{U_{0l}'}{c - U_{0l}} + \frac{4\alpha_l}{\sqrt{-D_l}}\operatorname{arcth}\frac{U_{0l}'}{\sqrt{-D_l}}\right) + b_l\right],$$

$$w_l = (c - U_{0l})\left[\frac{a_l}{D_l}\left(\frac{U_{0l}'}{c - U_{0l}} + \frac{4\alpha_l}{\sqrt{D_l}}\arctan\frac{U_{0l}'}{\sqrt{D_l}}\right) + b_l\right],$$

где коэффициенты b_l определяются из условий непротекания на крышке и дне, коэффициенты a_l –из кинематического условия на границе раздела, фазовая скорость c определяется из равенства $2a_1(c) - 1 = [1 - 2a_2(c)]h/\rho$, а дискриминанты $D_l = 4\alpha_l U_{0i}[c - U_{0i}(\alpha_l + 1/2)] - U_{0i}^2/4$. Выбор одного из этих решений определяется знаком D_l. Анализ показывает, что D_l положителен для малых скоростей потока и изменяет знак при появлении критического слоя.

Важно отметить, что граничные условия для коэффициентов a_l не могут быть удовлетворены для любых реальных значений фазовой скорости, вследствие появления критического слоя. Однако решения с комплексной фазовой скоростью существуют, что соответствует появлению неустойчивости. Как показано на рис. 4, инкремент роста возмущений возрастает с увеличением скорости потока (при $U_{0i} > 1.76$). Такое поведение согласуется с данными, полученными из полного решения Орра–Зоммерфельда (см. рис. 2). Таким образом, чтобы преодолеть особенности решений уравнения Рэлея, нет необходимости рассматривать более сложные уравнения, учитывающие вязкость.

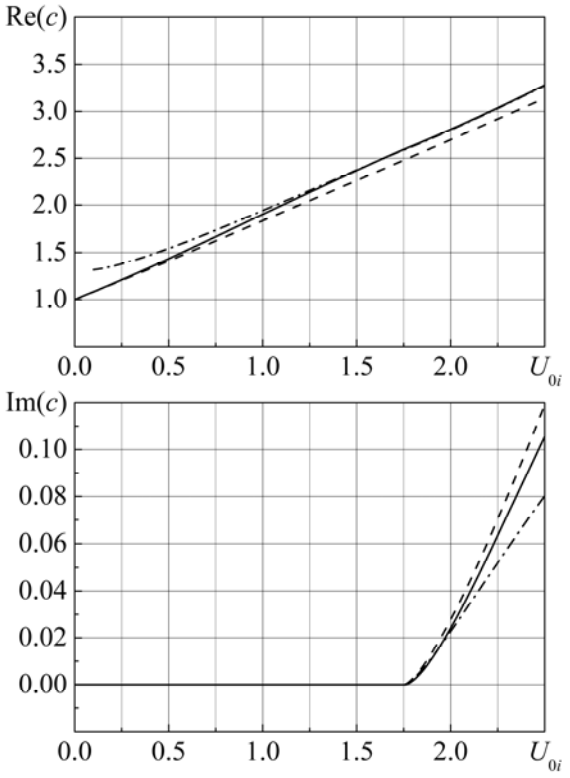

Рис. 4 Зависимость действительной (*a*) и мнимой (*b*) части фазовой скорости c от скорости U_{0i} при $\rho = 0.98$, $\mu = 0.23$, $h = 1.25$ (сплошные линии – результат численного решения уравнений Рэлея, штриховые – аналитического решения в первом приближении, а штрих-пунктирные – аналитического решения во втовом приближении).

На рис. 5 и 6 показаны профили вертикальной скорости в зависимости от вертикальной координаты для нескольких случаев (отсутствие стационарного течения, малые скорости потока и течение с критическим слоем). Хорошее согласование результатов расчетов по уравнению Орра–Зоммерфельда и аналитическому решению указывает на причину данной неустойчивости (особенность в критическом слое). Важно отметить, что спектральные методы позволяют анализировать одновременно большое количество мод возмущений, в том числе сдвиговые режимы Толлмина–Шлихтинга. Если отношение плотностей близко к единице, то неустойчивость Майлса является единственной неустойчивостью в этой задаче. Она определяет дальнейший нелинейный этап динамики волн в двухслойном течении.

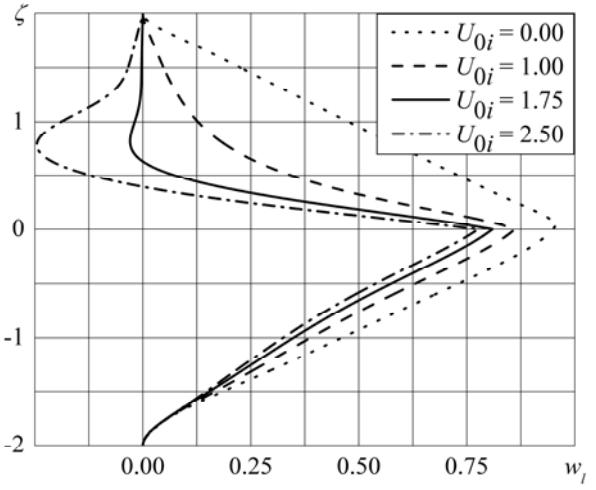

Рис. 5 Вертикальная скорость w как функция общей безразмерной вертикальной координаты $\zeta=(-1)^l(\zeta_l-1)$ согласно численному решению уравнений Орра–Зоммерфельда при $\mathrm{Ar}_1=3000$, $k_d=0.5$, $\rho=0.98$, $\mu=0.23$, $h=1.25$

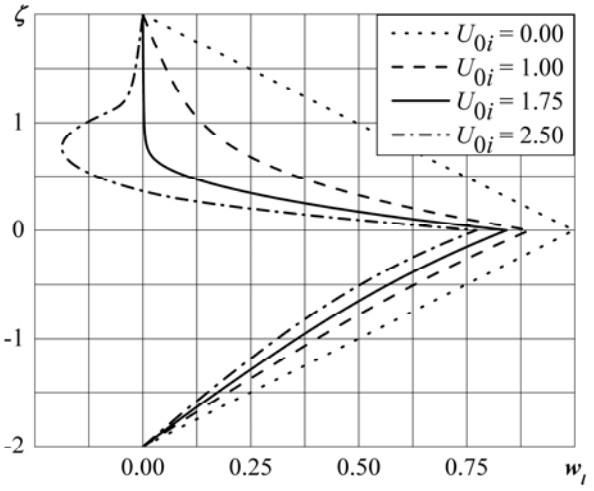

Рис. 6 Вертикальная скорость w как функция общей безразмерной вертикальной координаты $\zeta=(-1)^l(\zeta_l-1)$ согласно приближенной аналитической формуле при $\rho=0.98$, $\mu=0.23$, $h=1.25$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты данной работы. Обнаружена неустойчивость длинных линейных гравитационных волн на поверхности раздела стационарного ламинарного потока двух жидкостей. Аналитически показано, что такая неустойчивость возникает и в отсутствие вязких напряжений. Выяснено, что эта неустойчивость появляется из-за возникновения критического слоя (неустойчивость Майлса). Выявлена взаимосвязь данной неустойчивости с «межфазной» модой, исследованной в статьях Yih [6] и Yiantsios & Higgins [7]. Продемонстрировано наличие этой неустойчивости не только при малых, но и при больших значениях числа Архимеда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Drazin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic Stability. – Cambridge University Press, 1981. – 625 P.
2. Joseph D.D., Renardy Y.Y. Fundamentals of Two-Fluid Dynamics. Part I. – New York: Springer-Verlag, 1993. – 443 P.
3. Yih C.-S. Instability due to viscosity stratification // J. Fluid Mech. – 1967. – Vol. 27. – Pt 2. – P. 337 – 352.
4. Kao T.W., Park C. Experimental investigation of the stability of channel flow. Part 2. Two-layered co-current flow in a rectangular channel // J. Fluid Mech. – 1972. – Vol. 52. – N 3. – P. 401 – 423.
5. Yiantsios S.G., Higgins B.G. Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids // Phys. Fluids. – 1988. – Vol. 31. – N 11.– P. 3225 – 3238.
6. Burns J.C. Linear long waves in running water // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1953. – Vol. 49. –Pt 4. – P. 695 – 706.
7. Hooper A.P., Grimshaw R. Nonlinear stability at the interface between two viscous fluids // Phys. Fluids. – 1985. – Vol. 28. – N 1. –P. 37 – 45.
8. Samanta A. Effect of surfactant on two-layer channel flow // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 735. – P. 519 – 552.
9. Архипов Д.Г., Хабахпашев Г.А. Моделирование длинных нелинейных волн на границе раздела горизонтального потока двухслойной вязкой жидкости в канале // Изв. РАН. МЖГ. – 2005. № 1. – С. 143 – 158.

   Arkhipov D.G., Khabakhpashev G.A. Modeling of long nonlinear waves on the interface in a horizontal two-layer viscous channel flow // Fluid Dynamics. – 2005. – Vol. 40. – N 1. – P. 126–139.
10. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows // J. Fluid Mech. – 1957. – Vol. 3. – Pt 2. – P. 185 – 204.