УДК 536.24.01

НАГРЕВ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Актершев С.П., Барташевич М.В.

Институт теплофизики им.С.С.Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

Исследование выполнено в ИТ СО РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-19-10025)

АННОТАЦИЯ

Нагрев ламинарной пленки жидкости, движущейся под действием гравитации и газового потока по стенке с постоянной температурой исследован аналитически и численно. Воздействие газового потока на пленку учитывается через касательное напряжение и коэффициент теплообмена на поверхности жидкости. Для термического начального участка, на котором возмущение температуры ещё не успело прорасти до межфазной поверхности, получено аналитическое решение, зависящее от автомодельной переменной. Распределение температуры на термическом начальном участке служит начальным профилем для последующего участка течения, на котором происходит теплообмен между жидкостью и газом и установление равновесного распределения температуры в жидкости. На основе метода Галеркина предложен полуаналитический метод, в котором поле температуры в жидкости представлено в виде ряда по базисным функциям, удовлетворяющим граничным условиям на стенке и на поверхности пленки. Сопоставление расчетов по методу Галеркина с численным решением задачи конечноразностным методом показало, что использование 8–10 базисных функций вполне достаточно для хорошего согласования результатов. Хорошее согласование имеет место как для случая стекающей пленки, так и для случаев спутного и противоточного движения газа. Предложенный подход дает теоретическую оценку расстояния, на котором в жидкости устанавливается равновесное распределение температуры, а также легко обобщается на случай произвольного профиля скорости в пленке и на случай волнового течения пленки жидкости. Представленный упрощенный метод расчета, вследствие эффективного вычислительного алгоритма, позволяет детально описать поле температуры в неизотермической пленке жидкости при минимальных вычислительных затратах.

ВВЕДЕНИЕ

Течение тонкого слоя жидкости (пленки) по твердой поверхности используется в различных технологических процессах и аппаратах (абсорберах, теплообменниках, ректификационных колоннах, испарителях, конденсаторах) для интенсификации тепло-массообменных процессов. Прикладное значение неизотермических пленочных течений объясняет многочисленные теоретические [1-7] и экспериментальные [8-9] исследования, посвященные процессам переноса в жидких пленках. Классическая задача о нагреве пленки, стекающей по вертикальной изотермической стенке, впервые рассмотрена в монографии [1]. На термическом начальном участке, на котором жидкость успевает нагреться только в тонком слое вблизи стенки, профиль скорости в пленке можно аппроксимировать линейной зависимостью. В этих условиях было получено аналитическое решение в виде функции от автомодельной переменной, которое позволяет рассчитать тепловой поток к пленке.

Одним из важных применений неизотермического пленочного течения является холодильная машина абсорбционного типа. В аппаратах этого типа абсорбция пара в жидкости сопровождается выделением тепла, поэтому процессы массопереноса и теплопереноса взаимосвязаны. В [2] теоретический анализ проведен для начального участка, на котором тепловой слой вблизи изотермической стенки и диффузионный слой вблизи поверхности пленки еще не сомкнулись. Профиль скорости в тепловом слое аппроксимирован линейной зависимостью, а в диффузионном слое скорость считалась постоянной. Были получены автомодельные решения для профилей температуры и концентрации. В [3] задача о нагреве ламинарной пленки жидкости рассмотрена для случая заданной температуры стенки и заданной темпе-

© Актершев С.П., Барташевич М.В.

ратуры межфазной поверхности с учетом Нуссельтова (параболического) профиля скорости в пленке. Для всей области течения, начиная от входного сечения до установления равновесного распределения температуры, было построено полуаналитическое решение, которое хорошо согласуется с численным решением сформулированной проблемы. Решение представлено в виде суммы конечного числа слагаемых, выраженных через специальные функции Виттакера. Это решение позволяет рассчитать теплообмен между нагретой стенкой и пленкой жидкости. В работе [4] данная задача рассмотрена в связи с процессом абсорбции газа ламинарной стекающей пленкой жидкости. Тепловой поток на поверхности пленки считался заданным, а на стенке задавалось условие теплоизоляции. Такая упрощенная постановка позволила получить аналитическое решение для профилей температуры и концентрации, которые были использованы для вычисления генерации энтропии в стекающей пленке.

В последующих теоретических исследованиях процесс совместного тепло и массопереноса при абсорбции газа жидкостью также рассматривался при различных упрощающих предположениях. Так, например, в работе [5] скорость жидкости полагалась постоянной по сечению пленки. Вследствие сделанных упрощений эти результаты имеют ограниченную область применимости.

Существенным фактором в проблеме неизотермического пленочного течения является наличие волн в пленке. В большинстве практически важных случаев течение пленки неустойчиво и на поверхности жидкости развиваются волны. Как известно, даже при ламинарном течении наличие волн в пленке существенно интенсифицируют процессы переноса. Аналитическое описание теплопереноса в волновой пленке довольно затруднительно из-за сложности теоретического описания нелинейных волн, поэтому влияние волн на теплоперенос исследовалось, преимущественно, численными методами [6,7]. Интенсифицировать теплоперенос в жидкой пленке можно также за счет движения газа над поверхностью жидкости, как это имеет место при двухфазном течении в миниканалах и микроканалах, в том числе и в условиях микрогравитации. В этом случае на межфазной поверхности присутствует касательное напряжение, которое влияет на поле скорости и усложняет анализ проблемы. Термокапиллярный эффект также может быть причиной появления касательного напряжения вследствие неоднородности температуры межфазной поверхности в нагреваемой пленке. Так, например, в [8] выполнено экспериментальное исследование длины начального теплового участка в вертикальной нагреваемой пленке воды. Было показано, что при высоких числах Рейнольдса длина начального теплового участка для гладкой пленки уменьшается за счет термокапиллярных сил, направленных против основного течения.

Следует отметить, что в настоящее время в литературе отсутствуют модели, учитывающие влияние касательного напряжения на теплоперенос в нагреваемой пленке. В данной работе предложен полуаналитический метод определения поля температуры в гладкой пленке жидкости, движущейся под действием гравитации и газового потока. Используемая модель учитывает касательное напряжение на поверхности пленки, а также теплообмен между жидкостью и газом. Расчеты по предложенному методу сопоставляются с численным решением конечноразностным методом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерное стационарное течение ламинарной пленки жидкости постоянной толщины h на обогреваемой пластине, наклоненной под углом θ к горизонту. На обогреваемом участке задана температура стенки T_W. Поверхность жидкости контактирует с неподвижным газом, температура которого равна T_g, теплообмен между жидкостью и газом описывается коэффициентом теплообмена α. Динамическое воздействие газового потока на течение жидкости учитывается через заданное касательное напряжение τ на межфазной поверхности. Плотность ρ, динамическую вязкость μ, теплопроводность λ, температуропроводность a жидкости считаем постоянными. Введем декартову систему координат с осью Ox в направлении течения и осью Oy по нормали к пластине (рис. 1).

Профиль скорости в пленке имеет вид

$$u = \frac{g \sin\theta}{2\nu}\left(2yh - y^2\right) + y\frac{\tau}{\mu}$$

и удовлетворяет условиям на стенке и на межфазной поверхности

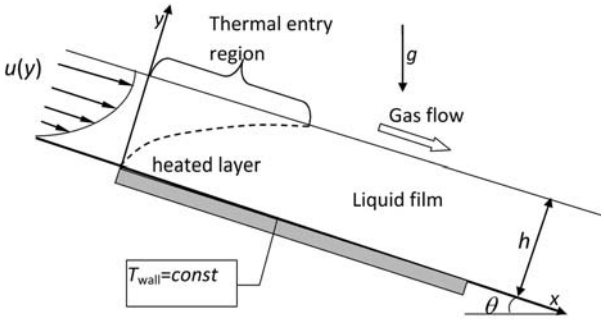

Рис. 1 Схема течения нагреваемой пленки.

$$u\big|_{y=0}=0\,,\ \mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=h}=\tau\,.$$

Изменение температуры жидкости описывается уравнением энергии, которое в погранслойном приближении $\partial^2/\partial x^2 << \partial^2/\partial y^2$ имеет вид

$$u\frac{\partial T}{\partial x}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (1)$$

На поверхности пленки теплообмен с газом описывается условием

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=h}=-\alpha\left(T\big|_{y=h}-T_g\right)$$

Выберем $l=3h\,Re\,Pr/2$ масштабом по оси Ox, где $Re=gh^3\sin\theta/3\nu^2$ – число Рейнольдса пленки, ν – кинематическая вязкость, $Pr=\nu/a$ – число Прандтля. В качестве масштаба температуры возьмем $\Delta T=T_W-T_g$. Перейдем к безразмерным переменным $x/l,\ y/h,\ \left(T-T_g\right)/\Delta T$, сохраняя прежние буквенные обозначения. В безразмерных переменных уравнение (1) и граничные условия для температуры на стенке и на поверхности пленки примут вид

$$\left((2+r)y-y^2\right)\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (2)$$

$$T(x,0)=1\,,\quad \left(\frac{\partial T}{\partial y}+Bi\cdot T\right)\Big|_{y=1}=0\,. \qquad (3)$$

Здесь $Bi=\alpha h/\lambda$ – число Био, $r=2\tau/(\rho gh\sin\theta)$ – безразмерное касательное напряжение. Для корректности постановки задачи систему (2-3) следует дополнить заданным профилем температуры жидкости на входе:

$$T\big|_{x=0}=F(y)\,. \qquad (4)$$

ТЕПЛОВОЙ НАЧАЛЬНЫЙ УЧАСТОК

На малых расстояниях от края нагревателя нагрев жидкости происходит в тонком слое вблизи стенки, поэтому уравнение (2) можно записать в виде

$$(2+r)y\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,. \qquad (5)$$

Поскольку толщина нагретого слоя много меньше толщины пленки, теплообмен с газом не влияет на распределение температуры в пленке. В этом случае граничное условие на межфазной поверхности следует заменить на $T\big|_{y\to\infty}=0$. Уравнение (5) имеет аналитическое решение в виде $T=\varphi(\xi)$, где $\xi=y/x^{1/3}$ – автомодельная переменная. Подставляя это в (5), получаем

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+\frac{(2+r)}{3}\xi^2\frac{d\varphi}{d\xi}=0 \qquad (6)$$

Уравнение (6) имеет общее решение:

$$\varphi(\xi)=C_1\int_0^{\xi}\exp\left(-(2+r)z^3/9\right)dz+C_2$$

Константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий $\varphi\big|_{\xi=0}=1$, $\varphi\big|_{\xi\to\infty}=0$. В результате получаем

$$\varphi(\xi)=1-\int_0^{\xi}\exp\left(-(2+r)z^3/9\right)dz\Big/\int_0^{\infty}\exp\left(-(2+r)z^3/9\right)dz$$

В случае покоящегося газа это решение получено в [1]. На рис. 2 показано решение уравнения (6) для различных значений r.

Из рисунка видно, что некоторое значение ξ_0, при котором температура близка к нулю, можно принять за условную толщину нагретого слоя. Толщина нагретого слоя ξ_0 зависит от параметра r, в частности, спутное движение газа приводит к уменьшению ξ_0, а противоточное движение – к увеличению.

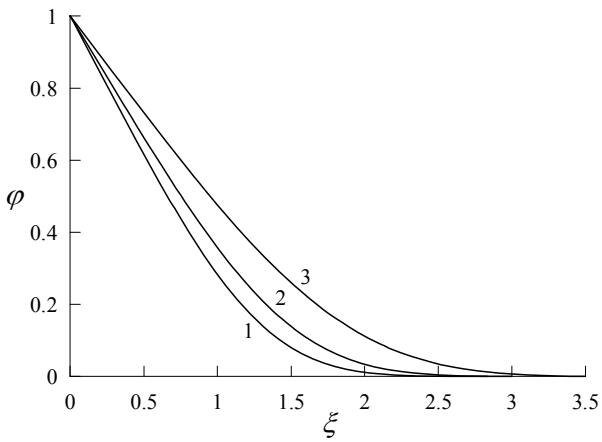

Рис. 2 Автомодельный профиль температуры $\varphi(\xi)$ на термическом начальном участке для различных значений r. (1) $r=1$, (2) $r=0$, (3) $r=-1$.

В случае покоящегося газа можно принять ξ_0 = 3.5. Тогда безразмерное расстояние x_0, на котором граница нагретого слоя выходит на поверхность пленки, определяется соотношением

$$x_0 = 1/\xi_0^3$$

Так, например, в случае покоящегося газа $x_0 \approx 0{,}023$. В конце термического начального участка, где нагретый слой выходит на межфазную поверхность, распределение температуры в пленке определяется соотношением

$$F(y) = \varphi\left(y / x_0^{1/3}\right) = \varphi(y\xi_0). \qquad (7)$$

Поскольку $x_0 << 1$, для умеренных значений r, длиной термического начального участка можно пренебречь по сравнению с протяженностью участка, на котором происходит установление равновесной температуры жидкости. Таким образом, (7) задает профиль температуры в пленке на входе этого участка. Исходя из условной толщины нагретого слоя ξ_0 = 3.5, размерная длина термически начального участка определяется как

$$l_{entry} = 0.05\left(\nu^2 / g\right)^{1/3} \mathrm{Re}^{4/3}\,\mathrm{Pr}.$$

УСТАНОВЛЕНИЕ РАВНОВЕСНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛЕНКЕ

При $x > x_0$ возмущение температуры «прорастает» на всю толщину пленки и теплообмен с газом оказывает влияние на профиль температуры в пленке. Вдали от края нагревателя в пленке устанавливается термическое равновесие, когда температура жидкости не зависит от координаты x. При этом весь тепловой поток от стенки передается через жидкую пленку в газ. Равновесный профиль температуры, удовлетворяющий уравнению (2) и граничным условиям (3), имеет вид

$$T_{steady} = 1 - \frac{Bi}{1+Bi}\,y. \qquad (8)$$

Будем решать задачу (2)-(4) методом Галеркина, который является одним из вариантов метода взвешенных невязок [10]. Ищем решение уравнения (2) в виде

$$T(x,y) = T_{steady} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\psi_k(y). \qquad (9)$$

Здесь ряд описывает процесс установления равновесной температуры. Пробные функции $\psi_k(y)$ должны удовлетворять соответствующим граничным условиям на стенке и на поверхности пленки:

$$\psi(0) = 0,\ \psi'(1) + Bi\,\psi(1) = 0. \qquad (10)$$

Выберем пробные функции в виде $\psi_k(y) = \sin\omega_k y$. Из (10) следует, что все частоты ω_k являются корнями трансцендентного уравнения

$$\omega \cdot \cos\omega + Bi \cdot \sin\omega = 0$$

и легко вычисляются методом итераций. Нетрудно показать, что система функций $\psi_k(y)$ представляет собой ортогональный базис (т.е. $\int_0^1 \psi_k \psi_m dy = 0$ при $k \neq m$), причем любую функцию переменной y на интервале $0 \le y \le 1$ можно представить в виде разложения в ряд по $\psi_k(y)$. Хотя все члены ряда в (9) удовлетворяют условиям на стенке и на поверхности пленки, но не удовлетворяют уравнению энергии (2). Подставляя (9) в (2), получаем невязку в виде суммы ряда:

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(x,y),$$

где $R_k(x,y) \equiv \left(\left((2+r)y - y^2\right)\frac{da_k}{dx} + \omega_k^2 a_k\right)\psi_k$.

Согласно методу Галеркина, потребуем, чтобы проекция компоненты невязки $R_k(x,y)$ на соответствующую базисную функцию $\psi_k(y)$ была равна нулю. Отсюда получаем уравнение для $a_k(x)$:

$$\frac{da_k}{dx}\int_0^1 \left((2+r)y - y^2\right)\psi_k^2 dy + \omega_k^2 a_k \int_0^1 \psi_k^2 dy = 0.$$

Это уравнение имеет решение $a_k(x) = A_k \exp(-\beta_k x)$, где

$$\beta_k = \omega_k^2 \int_0^1 \psi_k^2 dy \Big/ \int_0^1 \left((2+r)y - y^2\right)\psi_k^2 dy > 0. \qquad (11)$$

Таким образом, поле температуры жидкости в пленке имеет вид

$$T(x,y) = 1 - \frac{Bi}{1+Bi}\,y - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\beta_k x)\sin\omega_k y. \qquad (12)$$

Значения констант A_k определяются из профиля температуры (7) на входе. Подставляя (12) в условие (4), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \psi_k = T_{steady}(y) - F(y).$$

Таким образом, A_k есть коэффициент разложения функции $T_{stedy}–F$ в ряд по базисным функциям $\psi_k(y)$ и определяется формулой

$$A_k = \int_0^1 \left(T_{steady}(y) - F(y)\right)\psi_k dy \Big/ \int_0^1 \psi_k^2 dy . \quad (13)$$

Предложенный полуаналитический подход позволяет легко оценить расстояние, на котором в пленке устанавливается равновесная температура (8). Самая «медленно затухающая» экспонента в (12) соответствует $k = 1$, поэтому характерное расстояние, на котором устанавливается равновесная температура, равно

$$l_{eq} \approx 1/\beta_1 = \int_0^1 \left((2+r)y - y^2\right)\cos^2 \omega_1 y dy \Big/ \omega_1^2 \int_0^1 \cos^2 \omega_1 y dy$$

В случае $Bi << 1$ для частоты ω_1 имеем $\omega_1 \approx \pi/2$, отсюда $l_{eq} \approx 0.352 + 0.285r$. При $r = –1$ (противоточное движение газа) длина участка установления равновесной температуры примерно в 5.3 раза меньше, чем в случае неподвижного газа. Размерная протяженность участка установления равновесной температуры равна

$$l_{eq} = \left(0.761 + 0.616r\right)\left(\nu^2/g\right)^{1/3} \mathrm{Re}^{4/3}\,\mathrm{Pr} .$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В расчетах методом Галеркина использовались 10-15 базисных функций. Результаты расчетов сравнивались с результатами численного решения уравнения (2) конечноразностным методом. На рис. 3 показано влияние числа Био на нагрев вертикальной пленки в случае покоящегося газа. Кривыми 1-3 представлены зависимости температуры поверхности пленки от расстояния для различных значений *Bi*. Из рисунка видно, что температура поверхности пленки монотонно растет и на некотором расстоянии достигает равновесного значения $1/(1+Bi)$. Расстояние, на котором в пленке устанавливается равновесное распределение температуры, уменьшается с ростом *Bi*.

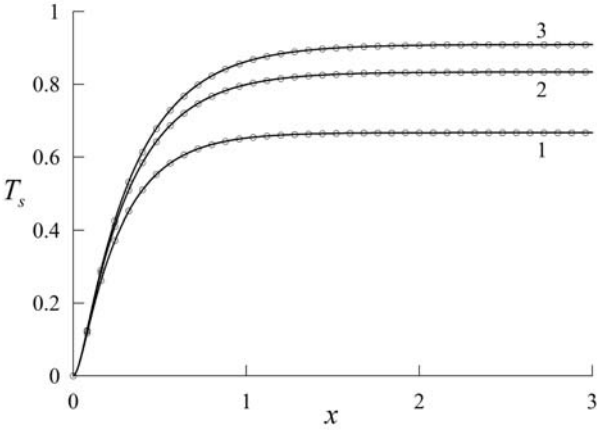

Рис. 3 Температура поверхности пленки в зависимости от расстояния в случае покоящегося газа. (1) *Bi* = 0,5, (2) *Bi* = 0,2, (3) *Bi* = 0,1. Сплошные линии – конечноразностный метод, кружки – предложенный метод.

На рис. 4 показано влияние безразмерного касательного напряжения *r* на нагрев вертикальной пленки.

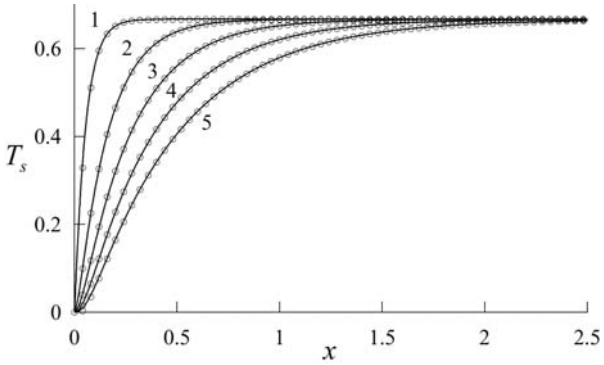

Рис. 4 Температура поверхности пленки в зависимости от расстояния при *Bi* = 0.5 при различных значениях *r*. (1) *r* = –1, (2) *r* = –0,5, (3) *r* = 0, (4) *r* = 0,5, (5) *r* = 1. Сплошные линии – конечноразностный метод, кружки – предложенный метод.

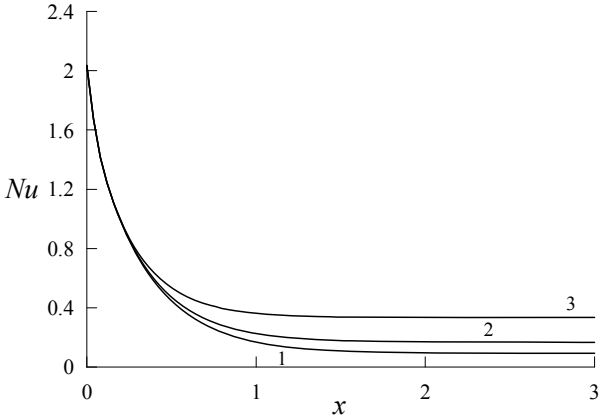

Рис. 5 Число Нуссельта в зависимости от расстояния для различных значений *Bi* в случае покоящегося газа. (1) *Bi* = 0,1, (2) *Bi* = 0,2, (3) *Bi* = 0,5.

Из рисунка видно, что в случае спутного движения газа стационарное распределение температуры устанавливается на большем расстояние, чем в отсутствие газового потока.

В случае противоточного движения газа стационарное распределение температуры устанавливается на существенно меньшем расстояние, чем для покоящегося газа. Этот эффект растет с увеличением параметра r . Из рисунков 3, 4 видно, что результаты расчетов хорошо согласуются с численным решением уравнения энергии конечноразностным методом.

На рис. 5 показано число Нуссельта в зависимости от расстояния для различных значений Bi. Из рисунка видно, что с увеличением расстояния значение Nu существенно падает до установившегося значения $Bi/(1+Bi)$.

ВЫВОДЫ

Исследована задача о нагреве ламинарной пленки жидкости, движущейся по изотермической поверхности под действием гравитации и газового потока. В условиях постоянной температуры стенки получено аналитическое решение для термически начального участка с учетом касательного напряжения на поверхности пленки. Предложен полуаналитический метод расчета теплопереноса в пленке жидкости на основе метода Галеркина. В расчетах показано, что расстояние, на котором устанавливается равновесное распределение температуры, зависит от направления газового потока. Спутное движение газа приводит к увеличению этого расстояние, а противоточное движение – напротив, к уменьшению этого расстояния. Сопоставление расчетов по предложенному методу с численным решением задачи конечноразностным методом показало, что результаты хорошо согласуются при использовании 8–10 базисных функций. Хорошее согласование имеет место, как для случая стекающей пленки, так и для случаев спутного и противоточного движения газа. Предложенный метод легко обобщается для произвольного профиля скорости в пленке, в том числе на случай турбулентной пленки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bird R. B., Stewart W. E., and Lightfoot E. N. Transport Phenomena, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2nd edition, 2002.
2. Nakoryakov V.E., Grigorjeva N.I. Calculation of heat and mass transfer in nonisothermal absorption on the initial portion of downflowing films // Theor. Found. Chem. Eng. – 1980. Vol. 14 (4). P. 305–309.
3. Aubert A., Candelier F., Solliec C. Semi-analytical solution for heat transfer in a water film flowing over a heated plane // Journal of Heat Transfer – 2010. Vol. 132. 064501.
4. Hidouri N., Chermiti I., Ben Brahim A. Second Law Analysis of a Gas-Liquid Absorption Film // Journal of Thermodynamics – 2013. Vol. 2013. ID 909162.
5. Mittermaier M., Schulze P., Ziegler F. A numerical model for combined heat and mass transfer in a laminar liquid falling film with simplified hydrodynamics // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2014. Vol. 70. P. 990–1002.
6. Актершев С.П. Теплоперенос в ламинарно-волновой пленке жидкости. // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. – 2011.–№ 2 (7).–С. 42-46.

   Aktershev S.P. Heat transfer in laminar - wavy liquid film // Modern science: collection of research papers – 2011. № 2 (7). P. 42-46.
7. Aktershev S.P., Alekseenko S.V. Nonlinear waves and heat transfer in a falling film of condensate // Physics of Fluid – 2013. – V.25. – 083602.
8. Chinnov E.A., Abdurakipov S.S. Thermal entry length in falling liquid films at high Reynolds numbers // Int. J. Heat Mass Transfer – 2013. Vol. 56. P. 775–786.
9. Lel V.V., Al-Sibai F., Kneer R. Thermal entry length and heat transfer phenomena in laminar wavy falling films // Microgravity Sci. Technol. – 2009. Vol. 21. P. 215–220.
10. Fletcher C.A.J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. Vol. 1 and 2, Springer–Verlag, 1987.