УДК 532.51

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНИХ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ В СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Цвелодуб О.Ю.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-22-00174).

АННОТАЦИЯ

На двух характерных примерах рассматривается влияние внешних нестационарных пондемоторных сил на волновые режимы течения пленки, стекающей по вертикальной поверхности. В первом случае на пленку ферромагнитной жидкости, стекающей в поле тяжести вдоль вертикального цилиндра большого радиуса, действует магнитное поле. Рассматриваются аксиально-симметричные возмущения на такой пленке. Во втором – рассматриваются двумерные волны на поверхности вязкой диэлектрической пленки жидкости, стекающей по внутренней поверхности одной из обкладок, вертикально расположенного плоского конденсатора. На пленку действует меняющееся со временем электрическое поле. Для этих примеров, в случае малых расходов задачу удается свести к рассмотрению одного модельного уравнения на возмущение толщины пленки. Целью работы является исследование этого модельного уравнения. Приведены численные расчеты решений, получено нескольких характерных сценариев эволюции периодических возмущений. Показано, что существенная роль пондемоторных сил обусловлена их влиянием на размер области линейной устойчивости невозмущенного течения с плоской свободной границей.

ВВЕДЕНИЕ

Не подчеркивая технологической стороны вопроса, отметим, что с академической точки зрения интерес к пленочным течениям, в частности, обусловлен тем, что они являются уникальными и чрезвычайно богатыми по содержанию объектами для изучения и моделирования волновых структур. В теоретическом плане пленочные течения служат великолепным источником очень интересных моделей, как правило, имеющих широкое применение в различных областях физики Для них характерным является наличие различного рода линейных неустойчивостей. В результате эволюции линейных возмущений формируются разнообразные нелинейные волновые структуры.

Так, например, нелинейные волновые режимы свободно стекающей пленки обусловлены развитием линейной неустойчивости исходного плоскопараллельного течения с постоянной толщиной по отношению к длинноволновым возмущениям. Различные внешние воздействия часто приводят к появлению дополнительных пондемоторных сил (см., например, [1–3]) . Эти силы могут заметно повлиять на устойчивость течения. Одним из существенных факторов, обуславливающих это влияние, является то, что под действием этих сил изменяется область линейной неустойчивости. Это может существенно изменить характер эволюции нелинейные волновые структур.

В работе на двух характерных примерах демонстрируется влияние на волновые режимы течения меняющихся во времени внешних пондемоторных сил.

В первом случае рассматривается тонкая пленка вязкой ферромагнитной жидкости стекающей вниз по вертикальному цилиндрическому проводнику радиуса R в поле силы тяжести. Толщина пленки мала по сравнению с радиусом проводника. По проводнику течет меняющийся со временем ток – $I_0F(t)$. В этом случае кроме силы тяжести на пленку действует сила со стороны переменного во времени пространственно неоднородного магнитного поля. Рассматриваются аксиально-симметричные возмущения на пленке.

Во втором примере рассматриваются волны на поверхности вязкой диэлектрической пленки жидкости, стекающей по внутренней поверхности одной из обкладок плоского конденсатора. Конденсатор расположен вертикально. На обкладки подается переменная во времени разность потенциалов

© Цвелодуб О.Ю.

$V(t) = V_0 F(t)$. На пленку действует меняющееся со временем электрическое поле. В этих примерах $F(t)$ – некоторая произвольная достаточно гладкая функция времени.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В длинноволновом приближении в случае малых расходов для двумерных возмущений эти две задачи сводятся к исследованию одного уравнения, описывающего эволюцию возмущений толщины пленки – [2–4]. После некоторых преобразований оно приводится к виду [3]:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H\frac{\partial H}{\partial x} + \left[1 - CF^2(\tau)\right]\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0 \qquad (1)$$

Здесь H – трансформированное отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня, C – коэффициент, определяемый физическими характеристиками задачи (см. [2–5]). Он может быть как положителен (ферромагнитная пленка [3–5]), так и отрицателен (диэлектрическая пленка [2]). Течение пленки происходит вдоль оси x, направленной параллельно вектору силы тяжести. Уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся относительно стенки со скоростью бесконечно малых нейтральных возмущений (см. [2–5]).

При $F = \mathrm{const}$ уравнение (1) переходит в известное уравнение Курамото – Сивашинского (К – С).

Из линейного анализа устойчивости тривиального решения $H \equiv 0$ уравнения К – С к возмущениям вида $H \sim \exp(i\alpha(x - c\tau)) +$ к.с.

(к.с. — комплексно сопряженное выражение) следует, что оно неустойчиво, если волновые числа α удовлетворяют условию $\alpha < \alpha_n$ (α_n — нейтральное волновое число). Периодические решения с такими волновыми числами экспоненциально нарастают. Коротковолновые возмущения ($\alpha > \alpha_n$) наоборот, со временем затухают.

Целью данной работы является исследование модельного уравнения (1) в случае, когда F представляло собой локализованный во времени импульс:

$$F(\tau) = 0.5(1 + th(\beta(\tau - \tau_0)), \qquad \tau \le \tau_*$$
$$F(\tau) = 0.5(1 + th(\beta(2\tau_* - \tau - \tau_0)), \qquad \tau \ge \tau_* \qquad (2)$$

В (2) $\tau_* > \tau_0$.

Для времен заметно отличающихся от τ_0 и $2\tau_* - \tau_0$ функция $F(\tau)$ практически постоянна, при $\tau \ll \tau_0$ и $\tau \gg 2\tau_* - \tau_0$ она равна нулю, а при $\tau_0 \ll \tau \ll 2\tau_* - \tau_0$ – единице. Таким образом, на этих временах уравнение (1) фактически представляет собой уравнение К – С. Только для значений $F(\tau) = 0$ областью неустойчивых волновых чисел является интервал $0 \div 1$, а при $F(\tau) = 1$ – $0 \div (1 - C)^{1/2}$. Таким образом, появление магнитной пондемоторной силы приводит к сужению области неустойчивости (C>0), а в результате действия электрической пондемоторной силы область неустойчивости расширяется (C<0). Такая перестройка существенно влияет на развитие возмущений.

В работе [2] рассматривались некоторые решения уравнения (1) для случая диэлектрической пленки (C<0). В ней бралась сглаженная локализованная функциия F. В работах [3–5] рассматривалась пленка ферромагнитной жидкости (C>0) в случаях, когда F представляло собой периодическую функцию [3] и нарастающую во времени ступеньку (применительно к формуле (2), это соответствует случаю $\tau_* = \infty$) [4, 5]. В [4] изучалась эволюция пространственного периодического сигнала, содержащего в начальный момент времени достаточно много ненулевых гармоник (до 10). Значение первой (основной) гармоники менялось в широком диапазоне в пределах $0.05 \div 1$. Было продемонстрировано большое разнообразие в развитии этих возмущений. Оно было обусловлено влиянием нескольких факторов (в их числе – изменение числа установившихся стационарно–бегущих решений с изменением волнового числа; зависимость характера эволюции решения от первоначального числа ненулевых гармоник, в том числе и от сдвигов их начальных фаз; изменение границы области неустойчивости и т.п.). При этом описать роль каждого из этих факторов достаточно сложно. Учитывая эту сложность, здесь мы ограничились, в основном, рассмотрением эволюции только тех решений уравнения (1), для которых начальные возмущения в случае $C = 0$ притягивались к решениям первого семейства. И, кроме того, во всех приводимых ниже примерах, аналогично [5], в начальный момент времени ненулевые значения задавались только для первой (рис. 1, 2) или первой и второй (рис. 3 – 9) гармоник.

Для нахождения нелинейных периодических по x решений уравнения (1) функция H представляется в виде пространственного ряда Фурье, гармоники которого являются функциями времени:

$$H(x,\tau) = \sum_n H_n(\tau)\exp(iknx)$$

Так как H — вещественная функция, то $\overline{H}_{-n} = H_n$. Черта означает операцию комплексного сопряжения.

При решении задачи использовался численный метод, описанный в [3, 4]. В приводимых ниже примерах брались следующие значения параметров: $\beta = 0.1$, $C = \pm 0.1$.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Даже для $F(\tau)=0$ в случае возмущений с малыми волновыми числами картина волновых режимов становится очень сложной. На их эволюцию сильно влияет конкретная начальная форма возмущения (см., например, [6]). В этих случаях изменение положения волнового числа по отношению к границе области неустойчивости может существенно изменить характер эволюции.

Представленные ниже результаты численных расчетов демонстрирует некоторые характерные изменения в эволюции периодических возмущений под действием практически прямоугольных во времени импульсов (2).

Во всех приводимых ниже примерах расчетов характерное время включения магнитного или электрического поля $\tau_0=150$, значение $\tau_*=300$. Наиболее проста и понятна эволюция возмущений в той области волновых чисел, где существует только одно стационарно-бегущее семейство решений (семейство I). При $F(\tau)=0$ эти числа лежат в интервале $0.554<\alpha<1$. Решения этого семейства антисимметричны, а их скорость в данной системе отсчета равна нулю (см., например, [7, 8]). Внутри этого интервала все начальные возмущения эволюционируют к соответствующему решению семейства I. И если под действием внешней силы волновое число не выходит за область, где стационарное семейство I единственно, то импульсное воздействие не оказывает радирального влияния. После прохождения импульса решение притягивается к тому же самому стационару.

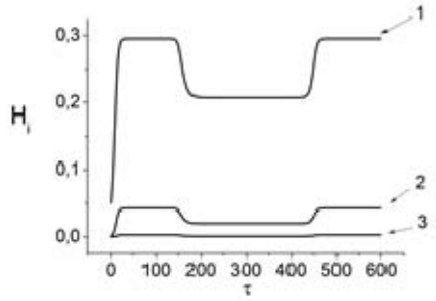

Рис. 1 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени: кривые 1, 2, 3 – первая, вторая и третья гармоники, соответственно. $C=0.1$

Пример такого развития возмущений показан на рис. 1 – 2. На этих рисунках представлена зависимость модулей первых трех гармоник от времени. Здесь волновое число $\alpha=0.9$.

Включение магнитного (электрического) поля приводит к тому, что теперь это волновое число лежит ближе к границе (дальше от границы) области неустойчивости, решение по-прежнему притягивается к стационарному решению первого семейства, но имеющего меньшую (большую) амплитуду. После выключения поля, значения гармоник восстанавливаются (ср. части кривых).

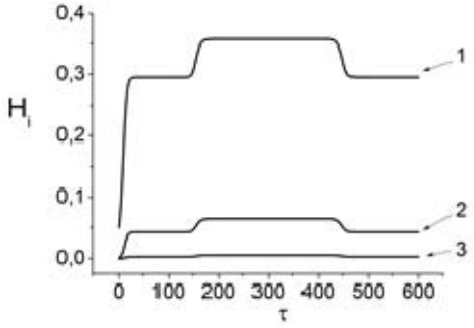

Рис. 2 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени: кривые 1, 2, 3 – первая, вторая и третья гармоники, соответственно. $C=-0.1$

В случаях, когда волновое число $\alpha<\alpha_n/2$, одним из типичных является сценарий, при котором в процессе эволюции вторая гармоника со временем становится преобладающей по сравнению с первой. Причем достаточно часто все нечетные гармоники с ростом τ стремятся к нулю, и решение притягивается к стационарному решению с удвоенным волновым числом – 2α.

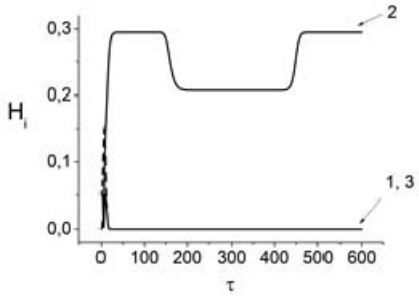

Рис. 3 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени: кривые 1, 2, 3 – первая, вторая и третья гармоники, соответственно. $C=0.1$

Соответствующие примеры показаны на рис. 3, 4. Здесь волновое число $\alpha=0.45$. Если на переходном этапе на временах $0<\tau<15$ профиль волны существенно несинусоидален, то после установления $(\tau>15)$ первая и третья гармоники становятся равны

нулю – кривые 1, 3 сливаются в одну линию (в этом случае все нечетные гармоники стремятся к нулю). Волна вырождается практически в чисто синусоидальную с длиной волны равной половине первоначальной. Как и в первом примере, появление магнитного (рис. 3) и электрического (рис. 4) полей и здесь приводит, соответственно, к уменьшению (увеличению) амплитуды предельной волны. Возмущение попрежнему эволюционирует к решению из первого семейства, т.е. притягивается к стационарному с удвоенным волновым числом -2α .

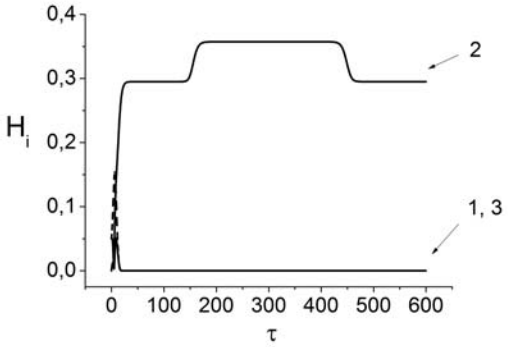

Рис. 4 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени: кривые 1, 2, 3 – первая, вторая и третья гармоники, соответственно. $C = -0.1$

Однако если немного изменить начальные данные, поведение решения может поменяться радикально. Пример этого представлен на рис. 5, 6.

Здесь волновое число такое же, как и в выше приведенном примере – $\alpha = 0.45$. И там, и здесь в начальный момент одинаковыми задавались первая гармоника – $H_{1r} = 0{,}05,\quad H_{1i} = 0$ и модули второй гармоники. Отличие заключалось в их фазовом сдвиге. Для решения, представленного на рис. 3, 4, в начальный момент – $H_{2r} = 0,\quad H_{2i} = 0{,}05$, а на рис. 5, 6 – $H_{2r} = 0{,}05,\quad H_{2i} = 0$. Но, как видно, такое изменение начальных данных, привело к качественно другой эволюции возмущения.

В отсутствии полей, как было показано в [5], при таких начальных данных (тех, при которых представлены решения на рис. 5, 6), в процессе эволюции возмущения можно сказать, что имеет место «волновая перемежаемость» – сначала решение притягивается к стационарному решению из семейства I с волновым числом $2\alpha = 0.9$. После достаточно длительного пребывания в этом состоянии, за короткий промежуток времени происходит перестройка решения, во время которой первая гармоника снова становится преобладающей. Т.е. волновое число решения снова становится равным $\alpha = 0.45$. Затем решение опять притягивается к стационарному решению с $2\alpha = 0.9$. Этот процесс повторяется регулярно. Любопытно, что при очередном притяжении к этому стационару у решения наблюдается фазовый сдвиг на полдлины волны по сравнению с предыдущим выходом [5].

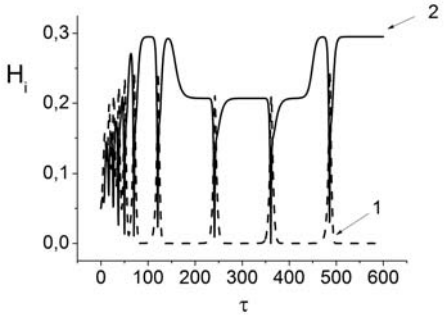

Рис. 5 Зависимость модулей первых двух гармоник от времени: кривые 1, 2 – первая и вторая гармоники, соответственно. $C = 0.1$

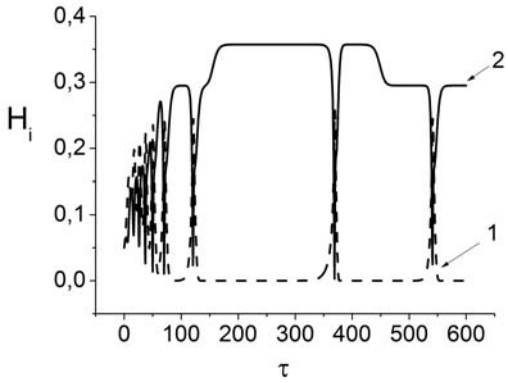

Рис. 6 Зависимость модулей первых двух гармоник от времени: кривые 1, 2 – первая и вторая гармоники, соответственно. $C = -0.1$

На рис. 5, 6 для тех же самых начальных значений гармоник показано, как меняется поведение решения при включении магнитного и электрического полей, соответственно. Качественно характер эволюции сохранился. Здесь так же имеет место «волновая перемежаемость». Хотя время жизни в окрестности стационарного решения из семейства I изменилось и, естественно, изменилась амплитуда этого стационара, так как, по сравнению со случаем $C = 0$, изменилось положение волнового числа относительно границы области неустойчивости. После выключения полей характер эволюции решения сохранился (сравните вид кривых при $0 < \tau < 150$ и $\tau > 450$) .

Во всех представленных выше примерах пондемоторные силы характер эволюции принципиально не меняют, просто при включении магнитного поля имеет место эффект стабилизации возмущений, и их

амплитуды уменьшаются, а электрическое поле оказывает дестабилизирующее воздействие, что проявляется в изменении амплитуд.

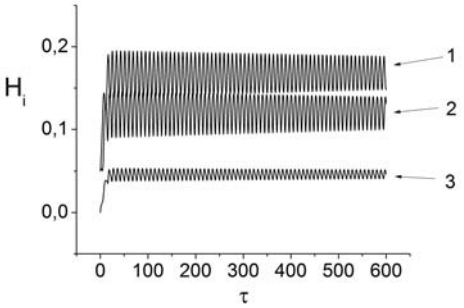

Рис. 7 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени: кривые 1, 2, 3 – первая, вторая и третья гармоники, соответственно. $C = 0$

Однако есть критические зоны в области неустойчивости, в которых влияние пондемоторных сил меняет ситуацию качественно. Одна из них –область с волновыми числами чуть меньше $\alpha = 0.5$. Эту ситуацию иллюстрируют рис. 7–9. Для решений, представленных на них волновое число равно $\alpha = 0.48$. Здесь начальные значения гармоник какие же, как и для рис. 5, 6 – $H_{1r} = 0{,}05$, $H_{1i} = 0$, $H_{2r} = 0{,}05$, $H_{2i} = 0$.

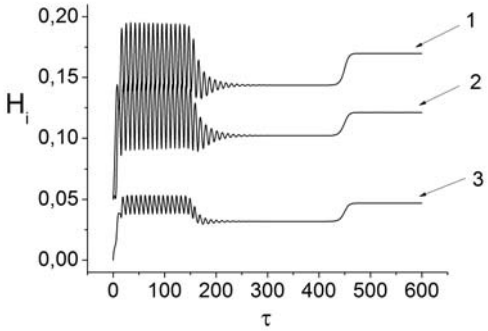

Рис. 8 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени: кривые 1, 2, 3 – первая, вторая и третья гармоники, соответственно. $C = 0.1$

На рис. 7 показано решение в случае, когда поля отсутствуют. В процессе эволюции оно выходит не на стационар, а на периодически осциллирующий во времени режим с доминирующей первой гармоникой.

Рис. 8 демонстрирует, как меняется поведение решения при включении магнитного поля. После переходного процесса решение притягивается к стационарному с тем же самым волновым числом. После выключения поля и перестройки, оно снова выходит на стационарное решение с тем же $\alpha = 0.48$.

Дестабилизирующее воздействие электрического поля в этом случае (рис. 9) приводит к тому, что после его включения $(\tau \approx 150)$ периодически осциллирующий во времени режим также исчезает. Но, теперь, вместо притяжения к стационарному режиму с тем же самым волновым числом, развивается режим с «волновой перемежаемостью», который регулярно притягивается к стационарному решению с волновым числом $2\alpha = 0.96$. При выключении поля $(\tau \approx 450)$ режим «перемежаемости» остается – решение попрежнему регулярно притягивается к стационару с волновым числом $2\alpha = 0.96$.

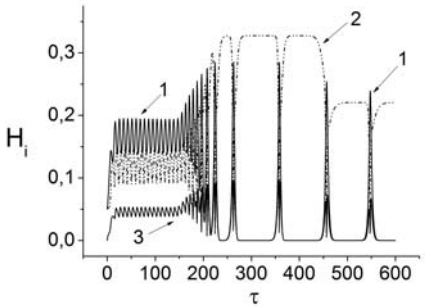

Рис. 9 Зависимость модулей первых трех гармоник от времени: кривые 1, 2, 3 – первая, вторая и третья гармоники, соответственно. $C = -0.1$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В случае малых чисел Рейнольдса представленное в работе уравнение (1) является перспективым для моделирования воздействий пондемоторных сил на волновые режимы течения стекающих пленок жидкости
- Проведено исследование периодических решений данного уравнения. Найдено несколько типичных сценариев эволюции таких решений. В частности, показано, что в ряде случаев они притягиваются к стационарно-бегущим решениям
- Основной эффект влияния на волновые режимы обусловлен тем, что появление объемной пондемоторной силы приводит к изменению области линейной неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демехин Е.А., Каплан М.А., Фойгель Р.А. Нелинейные волны в стекающем слое вязкой магнитной жидкости. // Магнитная гидродинамика. – 1988. – № 1. – С. 21 – 29.

   Demekhin E. A., Kaplan M. A., Foigel R. A. Nonlinear waves in a descending flow of a viscous magnetic fluid. // Magn. Gidrodin. – 1988. – № 1. – pp. 21 – 29.
2. Цвелодуб О. Ю., Саматов С. Н. Влияние электрического поля на волновые режимы течения тонкой пленки вязкой диэлектрической жидкости // ПМТФ – 2010. – Т. 51, № 3. – С. 73–83.

   Tsvelodub O.Y., Samatov C.N. Effect of the electric field on the wave flow regimes of a thin film of a viscous dielectric fluid // Journal of Appl. Mech. and Techn. Phys. – 2010. – Vol. 51, No. 3. – pp. 359–368.
3. Tsvelodub O.Y., Samatov C.N. Wave regimes on a ferromagnetic viscous-fluid film flowing down a verical cylinder // Fortschritt-Berichte (VDI Verlag GmbH, Dusseldorf). – 2011. – Reihe 3. – Nr. 920. – S. 210–220.
4. Tsvelodub O. Yu., Rohlfs W., Kneer R. Modeling of wave modes on a vertical film of a viscous ferromagnetic fluid flowing down a cylindrical electric conductor // Phys. Fluids. 2013. – Vol. 25, № 9. Article Number: 092101.
5. Цвелодуб О. Ю. Моделирование волн на пленке ферромагнитной жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии. – 2012. – № 2 (10). – С. 312-317.

   Tsvelodub O. Yu.Wave simulations on film ferromagnetic fluid flowing down a vertical cylinder // Modern Science: researches, ideas, results, technologies. – 2012. – № 2 (10). – pp. 312-317.
6. Цвелодуб О.Ю. Моделирование волновых режимов на пленке вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Теплофизика и аэромеханика. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 183 – 192.

   O.Yu. Tsvelodub Modeling of wave regimes on the film of viscous liquid falling down a vertical plate // Thermophysics and Aeromechanics. – 2012. – Vol. 19, № 2. – pp. 183 – 192.
7. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1974. – № 3. – С. 28–34.

   Neponyashchii A.A. Stability of wavy conditions in a film flowing down an inclined plane // Fluid Dynamics. – 1974. – № 3. – pp. 354–359.
8. Tsvelodub O.Y., Trifonov Y.Y. On steady-state travelling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Phisica D. – 1989. – Vol. 36, № 3. – pp. 255– 269.